

Silvia Pajus, Tauri Viil

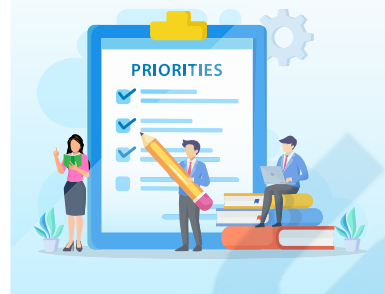
MATEMAATIKA TÖÖRAAMAT
8. KLASSILE

Tere!

Mauruse 8. klassi matemaatika õppevara koosneb kahest osast: käesolevast tööraamatust ja haridusportaalil TaskuTark asuvast digilisast „Videod 8. klassi matemaatika tööraamatu juurde“. Eesti haridus-asutustele pakume paketti, iseõppijatel on võimalus mõlemad osad eraldi osta.

Siinne tööraamat aitab sul selgeks saada kõik 8. klassi matemaatika teemad. Samal ajal on sul võimalus areneda ennastjuhtivaks õppijaks, sest lisaks matemaatika ülesannetele sisaldab see tööraamat ka eneseanalüüsi meetodeid.

Tööraamat koosneb **kuuest peatükist**, milles on kokku 12 teemat. Ühes peatükis on kaks erinevat teemat.



Iga teema algab **uute teadmiste nimekirjaga**, et oleksid teadlik, mida on vaja selgeks saada. Kui teema on läbitud, loe nimekirja uuesti ning tee enesekontroll – selleks värvi iga õpioskuse juures olev lahter sobivat värvi.

Roheline	Kollane	Punane
Oskan hästi!	Pean meelde tuletama.	Ei mäleta üldse.

Uute teadmiste nimekirjale järgneb **eelteadmiste tabel**, kus on kirjas, mis teadmised on selle teema läbimiseks vajalikud. Enne õppima asumist loe see läbi ja tee enesekontroll – ka siin värvi iga õpioskuse juures olev lahter sobivat värvi.

Roheline	Kollane	Punane
Oskan hästi!	Pean meelde tuletama.	Ei mäleta üldse.

Eelteadmiste testi abil saad kontrollida valmisolekut uueks teemaks. Testi ülesanded vastavad eelteadmiste nimekirjas olevatele õpitulemustele. Kui lahendad selle edukalt, oled uueks teemaks valmis. Kui jääd mõne ülesandega hätta, siis võta aega ja korda vastav teema üle.

Teoorialeheküljele on koondatud uue teema olulisemad reeglid ja mõisted. Sealt leiad ka QR-koodid, mis viivad TaskuTarga digilisas asuvate selgitavate videote juurde. Siin tuleks koos õpetajaga kõik seaduspärasused läbi mõelda, et tekiks terviklik teadmiste süsteem.

Näidisülesannete leheküljel on lisaks lahendustele ka QR-koodid, mis viivad TaskuTarga digilisas asuvate videote juurde, kus selgitatakse ja põhjendatakse iga näidisülesande lahenduskäiku. Selleks, et oma oskusi lihvida, kirjuta ülesanded vihikusse ja lahenda uuesti.

A-osas on ülesanded õpitulemuste kaupa, mille abil saad harjutada uute teadmiste rakendamist. Kasuta ülesannete lahendamiseks teoorialehel olevaid reegleid.

B-osas on ülesanded, mille lahendamiseks tuleb sul kasutada mitmeid uusi oskusi.

C-osas on ülesanded, mille lahendamiseks tuleb lisaks uutele teadmistele kasutada ka juba varem õpitud teadmisi.

Lisaks on ülesanded **harjutamiseks**. Need on lisaülesanded kiirematele või kodus tegemiseks.

Teema lõpeb **enda teadmiste analüüsimisega**. Ava teema alguses olev uute teadmiste nimekiri ja hinda oma teadmisi, värvides viimane lahter sobivat värvi. Kui kasutasid punast rohkem kui korra, siis võta aega ja keskendu veel kord teema õppimisele!

Iga peatükk lõpeb testiga, mille abil saad kontrollida, kui hästi oled omandanud uued teadmised. Testi vastused leiad tööraamatu lõpust.

Ole õppimisel tähelepanelik ja harjuta nii palju kui võimalik – siis näed matemaatika ilu ja võlu!

Silvia Pajus ja Tauri Viil,
autorid

SISUKORD

Sissejuhatus	2
1. TEHTED HULKLIIKMETEGA	4
1.1. Põhitehted hulkliikmetega.....	6
1.2. Korrutamise abivalemid... ..	18
2. KAHE TUNDMATUGA LINEAARVÕRRANDISÜSTEEM	32
2.1. Kahe tundmatuga lineaarvõrrandisüsteemi lahendusvõtted.....	34
2.2. Tekstülesannete lahendamine	44
3. SIRGED TASANDIL	56
3.1. Definitsioon ja teoreem.....	58
3.2. Sirgete paralleelsuse tunnused	66
4. KOLMNURK JA TRAPETS	78
4.1. Kolmnurk	80
4.2. Trapets.....	90
5. HULKNURKADE SARNASUS	102
5.1. Kolmnurkade sarnasuse tunnused	104
5.2. Hulknurkade sarnasus.....	112
6. RINGJOON	126
6.1. Ringjoonega seotud nurgad	128
6.2. Kolmnurga ümber- ja siseringjoon.....	138
7. ÜLESANDED ÜLDISEKS KORDAMISEKS	152
Vastused	160

1. TEHTED HULKLIIKMETEGA

1.1. Põhitehted hulkliikmetega

Hulkliikme mõiste

Hulkliikmete liitmine ja lahutamine

Hulkliikme korrutamine ja jagamine üksliikmega

1.2. Korrutamise abivalemid

Hulkliikmete korrutamine

Kaksliikme summa ja vahe ruudu valem

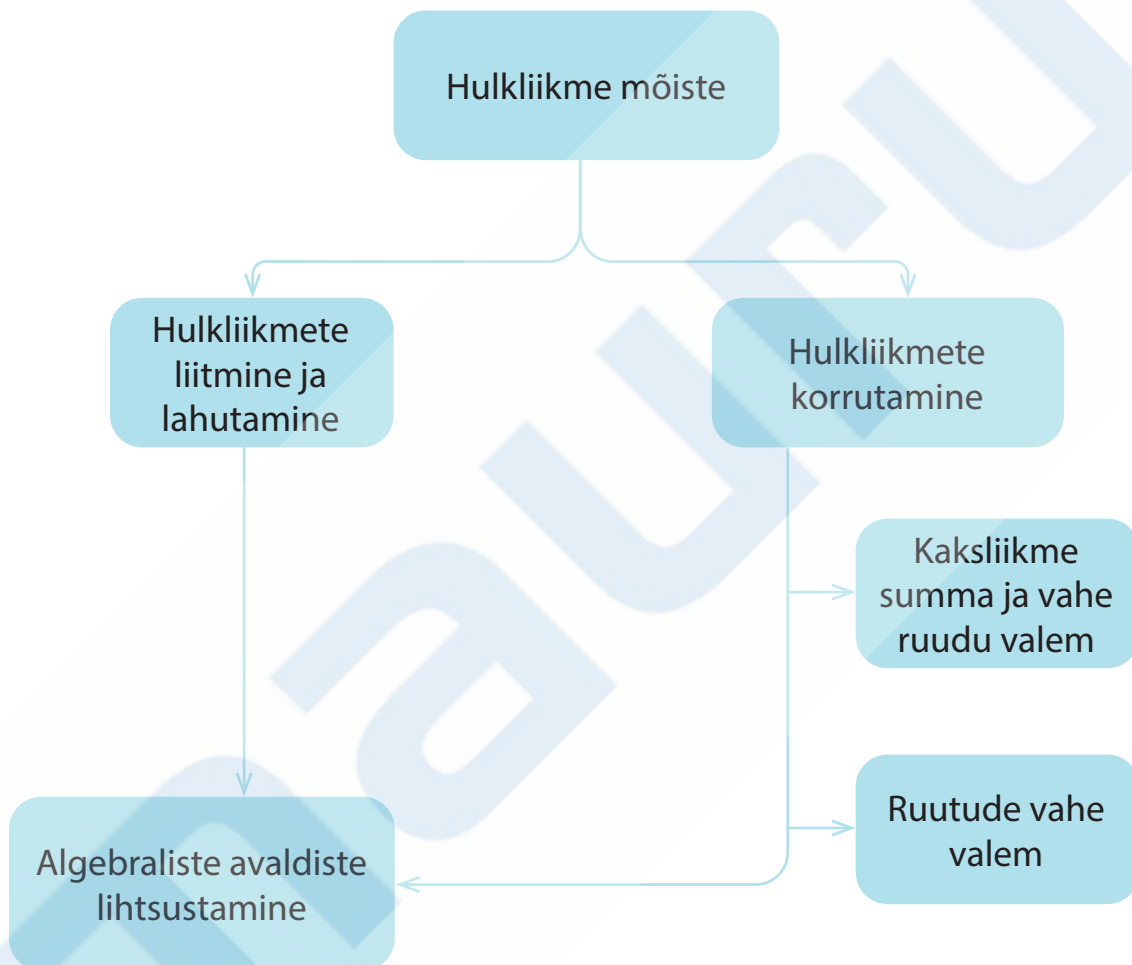
Ruutude vahe valem

Algebraliste avaldiste lihtsustamine

TEHTED HULKLIIKMETEGA

MÕTTEKAART

Täienda õppimise käigus seda mõttekaarti valemite, näidete ja joonistega.



1.1. PÕHITEHTED HULKLIIKMETEGA

Akna ümbermõõt

Uurime, kuidas muutub tasandilise kujundi ümbermõõt, kui muuta kujundi külgede pikkuseid. Selleks vaatleme ruudukujulist akent.

Puusepal on piisavalt puitu, et teha ruudukujuline aknakast.

Kui palju on vaja materjali, kui klient soovib esialgse ruudukujulise akna asemel hoopis ristkülikukujulist akent, mille üks külg on 2 cm võrra lühem ja teine külg 5 korda pikem esialgse ruudukujulise akna mõõtmetest?



Siit leiad nimekirja peatüki teadmistest ja oskustest.

Kui peatükk läbitud, siis hinda oma teadmisi siin.

 Selle peatüki lõpuks ...	
1. Tean mõisteid <i>hulkliige</i> , <i>kaksliige</i> ja <i>kolmliige</i> .	
2. Korrastan hulkliikmeid.	
3. Arvutan hulkliikme väärtuse.	
4. Liidan ja lahutan hulkliikmeid.	
5. Tegurdan hulkliiget ühise teguri sulgude ette toomisega.	
6. Korrutan ja jagan hulkliiget üksliikmega.	

Uue teema õppimiseks peavad sul mitmed varasemad teemad selged olema.

Hinda oma eelteadmisi. Värvilahter sobivat värvi.

 Enne selle peatüki õppimist ...	
1. Tean, mis on sarnased üksliikmed.	
2. Koondan sarnaseid üksliikmeid.	
3. Korrutan ja jagan võrdsete alustega astmeid.	
4. Korrutan ja jagan üksliikmeid.	
5. Arvutan avaldise väärtuse.	



KAS OLED UUEKS TEEMAKS VALMIS?

Kui lahendad testi edukalt, oled valmis uueks teemaks.
Vajadusel võta aega ja korda üle varasemalt õpitu.

1. Täida tühjad lahtrid. Kirjuta alumisse lahtrisse üksliige, mis on sarnane ülemises lahtris oleva üksliikmega.

Üksliige	$3x$	$3x^2y$	x^2y^2	$-3xy^2$	$-3xy$
Sarnane üksliige					

2. Koonda sarnased üksliikmed.

1) $-8x^2y^3 + 5x^2y^3 + 2x^2 - 1,5x^2y^3 - x^2 =$

2) $2a^3bc^2 - 5ab^2c^3 - 4a^3bc^2 + 4ab^2c^3 + 3a^3bc^2 =$

3. Tee tehted astmetega. Kirjuta vastus astmena.

1) $x^3 \cdot x^{14} \cdot x^4 \cdot x =$

2) $12^{14} : 12^2 : 12^{10} =$

4. Tee tehted üksliikmetega.

1) $-0,4mn^3p^2 \cdot (-5m^3np^2) =$

2) $-42x^5y^7z^3 : (6x^2y^4z) =$

3) $5x^3y^2 \cdot 0,2x^2y \cdot \frac{2}{3}xy^5 =$

5. Arvuta avaldise väärtus.

Avaldis	$x = -3$	$x = 0,8$
1) $-5x^2 + 3x - 7$		
2) $5(x^2 - 4) + 8x$		
3) $\frac{1}{5}x - (-0,5x + 2)$		

PÕHIREEGLID. PÕHITEHTED HULKLIIKMETEGA



Mida paremini tead põhireegleid, seda lihtsam on sul ülesandeid lahendada.

Üksliige on korrutis, kus teguriteks on arvud ja muutujad.

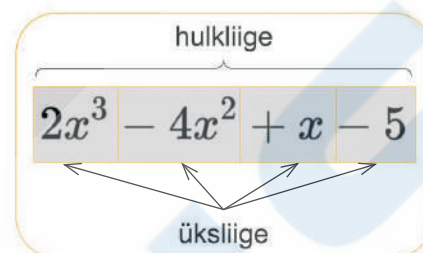
Näiteks $2x^2$; $-5a$; $0,3xy^5$.

Hulkliige on avaldis, mis on esitatud üksliikmete summana.

Näiteks $2x + 5xy^2 - 7y + 9$.

Kakslige on kahe üksliikme summa. Näiteks $-3x + 5xy$; $10ab - b$.

Kolmlige on kolme üksliikme summa. Näiteks $0,4x + 4y - 5$; $a - b + 10$.



Tegevus	Selgitus ja näide
Hulkliikme korrastamine	Hulkliikme korrastamine on hulkliikme kirjutamine kujul, kus kõik hulkliikme liikmed on normaalkujul ja järjestatud astendajate summa kahanemise järjekorras. Kui mitme üksliikme astendajate summa on võrdne, siis kirjutatakse üksliikmed muutujate tähestikulises järjekorras. $2ab + a^3 - 4b + b^2 = a^3 + b^2 + 2ab - 4b$
Hulkliikmete liitmine	Hulkliikmete liitmisel kirjutatakse liikmed üksteise järel ning koondatakse sarnased liikmed. $(2a + b - 4) + (4a - 5b + 1) = 2a + b - 4 + 4a - 5b + 1 = 6a - 4b - 3$
Hulkliikmete lahutamine	Hulkliikmete lahutamine on vastandväärtuse liitmine. Lahutatava hulkliikme ees on miinusmärk, mille tõttu tuleb lahutatava hulkliikme liikmed kirjutada vastupidiste märkidega. <i>Miinusmärk sulu ees muudab märgid sulu sees!</i> $(2a + b - 4) - (4a - 5b + 1) = 2a + b - 4 - 4a + 5b - 1 = -2a + 6b - 5$
Hulkliikme korrutamine üksliikmega	Hulkliikme korrutamisel üksliikmega korrutatakse üksliikmega selle hulkliikme iga liige ja tulemused liidetakse. $3a(2a + b - 4) = 3a \cdot 2a + 3a \cdot b + 3a \cdot (-4) = 6a^2 + 3ab - 12a$
Hulkliikme jagamine üksliikmega	Hulkliikme jagamisel üksliikmega jagatakse hulkliikme iga liige selle üksliikmega ja tulemused liidetakse. $(2b^3 + 6b^2 - 4b) : (-2b) = 2b^3 : (-2b) + 6b^2 : (-2b) - 4b : (-2b) = -b^2 - 3b + 2$
Hulkliikme tegurdamine ühise teguri sulgude ette toomisega	Hulkliikme tegurdamiseks: 1) leia kõigi üksliikmete ühine tegur; 2) kirjuta leitud ühine tegur sulgude ette või taha; 3) sulgudesse kirjuta hulkliige, mis on saadud antud hulkliikme jagamisel sulgude ette või taha toodud teguriga. $2b^3 + 6b^2 - 4b = 2b \cdot b^2 + 2b \cdot 3b + 2b \cdot (-2) = 2b(b^2 + 3b - 2)$ Tegurdamise õigsust saab kontrollida sulgude avamise ehk korrutamisega.

1.1. NÄDISÜLESANDED

Püüa aru saada, milliseid reegleid ja valemeid ning kuidas kasutatakse. Vajadusel kirjuta ülesanded vihikusse.



Sinisega on märgitud see osa ülesande lahendusest, mille võib läbi mõelda ja edaspidi ülesandeid lahendades kirjutamata jätta.

► Hulkliikme korrutamine üksliikmega

1. Lihtsusta avaldised.

$$1) -2x^3y(3xy^3 - 2y^2) = -2x^3y \cdot 3xy^3 - 2x^3y \cdot (-2y^2) = -6x^4y^4 + 4x^3y^3$$

$$2) 5a^2b(2ab^3 - b^2 + 5a) = 5a^2b \cdot 2ab^3 - 5a^2b \cdot b^2 + 5a^2b \cdot 5a = 10a^3b^4 - 5a^2b^3 + 25a^3b$$

► Hulkliikme jagamine üksliikmega

2. Lihtsusta avaldised.

$$1) (8x^4 + 16x^3 - 32x^2) : (8x^2) = 8x^4 : (8x^2) + 16x^3 : (8x^2) - 32x^2 : (8x^2) = x^2 + 2x - 4$$

$$2) (3a^3b^4 - a^2b^3) : (-a^2b^2) = 3a^3b^4 : (-a^2b^2) - a^2b^3 : (-a^2b^2) = -3ab^2 + b$$



Nädisülesanded 1.1

► Hulkliikme tegurdamine

3. Tegurda hulkliige.

$$1) 10a + 5b = 5 \cdot 2a + 5 \cdot b = 5(2a + b)$$

$$2) 5 - 15x = 5 \cdot 1 - 5 \cdot 3x = 5(1 - 3x)$$

$$3) 20a^3 - 50a^2 + 80a = 10a \cdot 2a^2 - 10a \cdot 5a + 10a \cdot 8 = 10a(2a^2 - 5a + 8)$$

$$4) -15x^7y^2z^2 - 25x^5y^2z = -5x^5y^2z \cdot 3x^2z + (-5x^5y^2z) \cdot 5 = -5x^5y^2z(3x^2z + 5)$$

$$5) 18m^6n^3 - 3m^2n^4 = 3m^2n^3 \cdot 6m^4 - 3m^2n^3 \cdot n = 3m^2n^3(6m^4 - n)$$



Nädisülesanded 1.2





ÜLESANDED. A

► Hulkliikme, kaksliikme ja kolmliikme mõiste teadmine

1. Kirjelda oma sõnadega, mis vahe on üksliikmel ja hulkliikmel.

.....

.....

.....

2. Tõmba joon alla hulkliikmetele, mis ei ole üksliikmed.

$$4x + 4x^4y - xy^3$$

$$a + 1$$

$$0,24x^2y^2$$

$$4x^3 \cdot 6y$$

$$2x^7 + 7u^2 - v^4 - 5$$

$$3x + 8 = 4$$

$$u^2 - v^2u$$

$$27a^5b^3 : 3a^2b \cdot 8a$$

$$\frac{3x^2y}{5x}$$

$$0,34c^3b^2a$$

$$1765$$

$$V = a^3$$

$$5x + 34 = 15 - 2x$$

$$4u^2 - 9v^2$$

3. Kasutades üksliikmeid $5xy$, $-2x^2$, $-xy^3$ ja $11y$, koosta kolm erinevat kaksliiget ja kolm erinevat kolmliiget.

Kaksliikmed	Kolmliikmed

► Hulkliikmete korrastamine

4. Ühenda joonega võrdsed hulkliikmed.

$4x + 7y + 3y - 4y$
$5x^2 - 4x + 5x - 6$
$8 + 3x - 5x^2 + x$
$8x - 3x - x + y$
$x^2 + y^2 - 4x - y^2 + 2x$
$9x + y^2 + 3x - 2y^2 + 5$

$5x^2 + x - 6$
$x^2 - 2x$
$-5x^2 + 4x + 8$
$-y^2 + 12x + 5$
$4x + y$
$4x + 6y$

5. Koonda sarnased üksliikmed ja korrasta saadud hulkliikmed.

a) $3x + 4y + 2x - 3y =$

b) $5a + 3b - 8ab + 5a =$

c) $-12a + 8a - 7b + 2a - 7b =$

d) $7xy - 5x - 2y + 10xy + 5x =$

e) $2x + x + 4yz - 5y + yz =$

f) $3x^2 + 8y - 2x + 4xy =$

g) $u^2v^2 - 4u + 5u^2v + 3u^2v^2 - 5u =$

h) $3ab^2 - ab^2 - 4a^2b + 5a^2b^2 =$

i) $-5xz + 4xz^2 - 4xz^3 + xz + 3xz^3 =$

j) $-3u^2 + v + 8u^2v - 5u^2v + 3u^2 - 3u^2v =$

► **Hulkliikme väärtuse arvutamine**

6. Arvuta hulkliikme väärtus.

Hulkliige	$u = 10$	$u = -0,2$
$-10u^2 + u - 5$		
$5u^3 + 3u^2 - 0,5u - 1$		

Hulkliige	$x = 2$ ja $y = -1$	$x = -1,5$ ja $y = 2$
$xy^2 - y^2 + 4x$		
$3 + 2y^3 - 0,1x$		

► **Hulkliikmete liitmine**

7. Liida antud hulkliikmed ja korrasta tulemus.

Hulkliige 1	Hulkliige 2	Summa
$2a + 3b$	$3b + 5a$	$(2a + 3b) + (5a + 3b) = 7a + 6b$
$4x + 6y + 2$	$8x + 6y + 4$	
$x^2 + y + 17$	$3x^2 + 2y$	
$18x + 6xy^3 - 3$	$7y + 5xy^3$	
$2a^2b - 5ab - 5$	$-3a^2b + 7ab + 3$	
$-14a^2 - b - ab$	$7a^2 - 5ab$	
$2ab^2 - 5a + 4b$	$3ab^2 + 5a^2 - 4a$	

► **Hulkliikmete lahutamine**

8. Lahuta antud hulkliikmed ja korrasta.

Hulkliige 1	Hulkliige 2	Vahe
$5u + 2v$	$3u + v$	$(5u + 2v) - (3u + v) =$
$8a - 4b$	$6b + c$	
$7x^2y + 3x$	$5xy^2 + 5x + 12$	
$12a - 4b^2 + 3c$	$6a + 6b^2 + 2c$	
$10uv^2 - 9u$	$-3u^2v + 9v$	
$4x + xy^3 - 1$	$xy^3 + 9 - 4x$	
$-4y^2 + 8z^2$	$-4y^2 - 2z^2$	

► **Hulkliikme korrutamine ja jagamine üksliikmega**

9. Korruta hulkliige üksliikmega.

a) $(3x^2 + x) \cdot x =$

b) $(2xy - 3y) \cdot 4y^2 =$

c) $-6xy(xy + 6y^3) =$

d) $10a^2(2ab^2 - 1,5b) =$

e) $(4c^2 - 3a^2 + 2b^2) \cdot ab^2c^3 =$

f) $(2bc^2 + a^3c - 5) \cdot (-4ac^2) =$

g) $-2,5v^2(4u^2 - 10v + 8u^2v^2) =$

h) $(-25u^2v^3 - 50uv - 10v) \cdot (-\frac{1}{5}v^2) =$

i) $(3\frac{1}{3}x^2y + x - 3y^2) \cdot 3x =$

10. Jaga hulkliige üksliikmega.

a) $(12x^2 + 4x) : 4x =$

b) $(100u^2v^2 - 25uv^3) : 5uv^2 =$

c) $(1,2ab^3 - 5a^2b) : (-2ab) =$

d) $(-14x^3y^2 + 42x^2y^3) : (7xy^2) =$

e) $(-a^2b^3 - 6b^3 + 9ab) : (-3b) =$

► **Hulkliikme tegurdamine ühise teguri sulgude ette toomisega**

11. Too ühine tegur sulgude ette.

a) $4ab + 2a + 6 =$

b) $12x^2 + 4xy + 6x =$

c) $24ab^2 - 3a^2b - 8ab =$

d) $-10u^3v - 50u^2 - 20uv =$

e) $x^2y^2z^2 + x^3y^2z + xy^2z^2 - y^2z^2 =$

f) $0,5a^3b - 0,5a^2b + 0,5ab =$

g) $-75uv^3 + 100u + 50v =$



12. Kirjuta avaldis ja koonda.

a) Liida hulkliikmele $4x^2 + 2xy + 6y^2$ hulkliige $-xy + 5y^2 - 3$.

.....

.....

b) Lahuta hulkliikmest $3uv - 6v + 2u^2v$ hulkliige $uv^2 + 4uv + 4v$.

.....

.....

c) Leia hulkliikmete $xy - 5x$ ja $3x^2y^2 + 3x + 2$ summa.

.....

.....

d) Lahuta hulkliikmete $12x^3z^2 - 5z^2$ ja $6x^2z - 3x^3 + z^2 - 3$ summast hulkliige $17x^3z^2 - 4x^3 - 5z^2 + 2$.

.....

.....

13. Tee tehted ja arvuta vastuseks saadud hulkliikme väärtus.

a) $(2x^2 - 4x + 2) + (x^2 - 6x) =$

Kui $x = -0,5$, siis

.....

.....

b) $(-5ab^2 + 3a) - (-5ab^2 + ab - a) =$

.....

.....

Kui $a = 2,5$ ja $b = -8$, siis

.....

.....

c) $-3x(4y^2 - 2xy - 1) + (-4x^4y^3 - 2x^3y^2 + 6x^2y^2) : 2x^2y^2 =$

.....

.....

Kui $x = -1$ ja $y = 1$, siis

.....

.....

d) $-(a^2 + 3b^2 - b) \cdot (-4ab) - (3b - 4a) \cdot 4b^3 + (-4a^5b^2 + 12a^2b^5) : a^2b =$

.....

.....

Kui $a = 10$ ja $b = 0$, siis

.....

.....

14. Leia, a) missugune hulkliige tuleb liita hulkliikmele $2x^3y^2 + 1,5x^2y - x^2$, et nende summa oleks $-2x^3y^2 + x^2y + y^2$.

[illegible]

Vastus.

- b) missugune hulkliige tuleb lahutada hulkliikmest $-3a^2b + 3ab^2 + 4$, et nende vahe oleks $a^2b + 4a - 6ab$.

[illegible]

Vastus.

- 15.** Too lugejas ja nimetajas ühine tegur sulgude ette ja taanda.

1) $\frac{16x^2 + 8x + 12}{24x + 4} =$

2) $\frac{8ab^2+4a^2b}{5ab+5a^2} =$ _____

3) $\frac{28xy^3z + 35x^2z}{7xz^2 + 42x^2z - 14xz} =$

4) $\frac{2x^2y^2 + 14xy^2 - 10xy}{4x^2y - 5xy^2 - 6xy} =$

5) $\frac{-27a^2b^2 - 45a^2c - 18a^2}{-24a^2b - 12a} =$

- 16.** Kirjuta avaldis ja arvuta.

- a) Hulkliikmele $4ab^2 + 5ab - 4a$ liidetakse hulkliikmed $-8a^2b + 3ab^2 - 5a$ ja $2ab^2 - 7ab + 2$.

- b) Hulkliikmete $8xy^2 + 6x^2 + 2y^2$ ja $4x^2y - 6y^2$ vahele liidetakse hulkliige $12x^2y - 5xy^2 + x^2$.

- c) Hulkliikme $-xy - 5y + 3$ ja üksliikme $2x$ korrutisest lahutatakse hulkliikme $8x^2y^2 - 3xy^2$ ja üksliikme $-xy^2$ jagatis.