

Allar Veelmaa

**VALMISTU MATEMAATIKA
RIIGIEKSAMIKS
2025**

Abimaterjal abituriendile

 **maurus**
ÕPPEMATERJALIDE KIRJASTUS

2024

Väljaandja kinnitab tööraamatu vastavust kehtivale gümnaasiumi riiklikule õppekavale ning haridus- ja teadusministri poolt õppekirjandusele kehtestatud nõuetele.

Allar Veelmaa

Valmistu matemaatika riigieksamiks 2025
Abimaterjal abituriendile

Retsenseerinud Sirje Sild

Autor tänab retsentsenti, toimetuse töötajaid ning Tallinna 32. keskkooli õpetajat Anne Almetit kasulike märkuste ja huvitavate ideede eest. Kõikidest leitud ebatäpsustest ja vigadest palun teatada e-kirjaga allarveelmaa8@hotmail.com.

Toimetajad Regina Reinup, Inge Vestrik
Keeletoimetaja Piret Pöldver
Tehniline teostus Heisi Väljak
Joonised Allar Veelmaa ja SA Innove

ISBN 978-9916-738-43-6



Mauruse digiõppevara leiad TaskuTargast.

(taskutark.ee)

Autoriõigus Allar Veelmaa ja kirjastus Maurus OÜ 2024
Riigieksamite ülesannete autoriõigus: SA Innove/Haridus- ja Noorteamet

Tartu mnt 74, 10144 Tallinn, telefon 5919 6117
www.kirjastusmaurus.ee
tellimine@kirjastusmaurus.ee

Kõik õigused käesolevale väljaandele on kaitstud. Ilma autoriõiguse omaniku kirjaliku loata pole lubatud ühtki selle väljaande osa paljundada ei elektrooniliselt, mehhaaniliselt ega muul viisil.

SISUKORD

Mida tasub teada matemaatika riigieksami kohta? Nõuded lahenduste vormistamisele	5
Näidislahendused	7
Riigieksamite ülesanded 2017–2024	28
Küsimusi ja ülesandeid riigieksamiks valmistumisel	72
1. Arvuhulgad ja avaldised	72
2. Võrrandid ja võrrandisüsteemid	75
3. Tekstülesanded	80
4. Protsentülesanded	82
5. Võrratused ja võrratusesüsteemid	84
6. Trigonomeetria	88
7. Vektorid. Joone võrrand	93
8. Funktsiooni uurimine ilma tuletiseta. EkspONENT- ja logaritmifunktsioon, vastavad võrrandid ja võrratused	97
9. Aritmeetiline ja geomeetriline jada. Hääbuv jada. Jada piirväärtus	104
10. Funktsiooni piirväärtus. Funktsiooni tuletis ja selle rakendused	107
11. Määramata ja määratud integraal. Integraali rakendused	114
12. Sündmuse tõenäosus. Statistika elemendid	120
13. Planimeetria elemendid	125
14. Stereomeetria	129
15. Ülesandeid iseseisvaks lahendamiseks	133

TÖÖRAAMATU KASUTAJALE

Selles tööraamatus on näpunäiteid, soovitusi ja harjutusülesandeid matemaatika riigieksamiks valmistumisel. Ülesanded on rühmitatud teemade järgi, kuid on ka ülesandeid, mille lahendamiseks on vaja teadmisi ja oskusi enam kui ühe teema ulatuses.

Tööraamat sobib nii kitsa matemaatika kui ka laia matemaatika kursuse järgi õppijatele. Kui ülesande number on **musta värvi**, siis sobib see lahendamiseks kõigile. **Punase numbriga** ülesanded on mõeldud eelkõige laia kursuse järgi õppijatele, kuid see ei tähenda, et kitsa kursuse järgi õppinud õpilane neid lahendada ei tohiks.

Enamiku ülesannete juurde on toodud vastused või näpunäited. Kui mõni ülesanne osutub raskeks ja seda ei õnnestu kohe lahendada, siis proovige järgmist ja mõne aja pärast pöörduge keeruliseks osutunud ülesande juurde tagasi. Loomulikult võib abi küsida ka matemaatikaõpetajalt või klassikaaslastelt.

Kui ülesande juures on märges „kontrollige vastust arvuti abil“, siis kasutage neid IT-vahendeid, mida olete varemgi kasutanud (nt GeoGebra, Photomath, Math Solver, Wolframalpha, Symbolab vms).

Kõik ülesannete lahendamiseks vajalikud valemid on tööraamatu kaante sisekülgedel. Neid valemeid pole mõtet mehaaniliselt pähe õppida, vaid meelde tuleb jätta seosed.

Lisaks tööraamatu ülesannetele võib lahendada ka veebiaadressil <http://www.allarveelmaa.ee> olevaid teste ja vaadata õppevideosid.

See tööraamat on mõeldud individuaalseks kasutamiseks ja siia võite teha märkmeid ning olemasolevat vaba ruumi kasutada mõne ülesande lahendamiseks.

Edu soovides
Allar Veelmaa,
Loo keskkooli matemaatikaõpetaja

Mida tasub teada matemaatika riigieksami kohta?

Nõuded lahenduste vormistamisele

1. Tasub teada

Täpsed juhised selle kohta, mida eksami ajal võib teha ja mida mitte, leiate Haridus- ja Noorteameti veebilehelt.

1. Eksami esimene osa kestab 120 minutit ja teine osa 150 minutit. Kahe osa vahel on paus 45 minutit.
2. Eksamitöö kirjutamisel võib kasutada ainult musta või sinist tindi- või pastapliiatsit. Kustutatava tindipliatsi kasutamine on keelatud. Hariliku pliatsiga kirjutatud lahendusi ei hinnata (välja arvatud joonised).
3. Ülesande lahendus tuleb kirjutada eksamivihikus selleks ette nähtud kohale. Kui lahendus ei mahu ette nähtud kohale, siis tuleb seda jätkata eksamivihiku lõpus oleval lisalehel. Pooleli jäänud lahenduse lõppu tuleb kirjutada „Lahendus jätkub lisalehel“ vms. Kui eksamivihikus olevale lisalehele lahendused ei mahu, siis tuleb eksamikomisjonilt küsida lisapaber.
4. Arvutuste tegemisel võib kasutada kalkulaatorit. Mobiiltelefoni ja teiste tehniliste seadmete kasutamine ei ole lubatud.
5. Eksamitöö vormistamisel ei tohi kasutada mis tahes kujul esinevaid korrektoreid (vedelik, lint vms).
6. Eksami ajal ei ole lubatud töövahendeid (kalkulaator, joonlaud, mall jms) üksteisele laenata.
7. Käekirja tõttu ebaselged kohad loetakse veaks. Vale arv, sõna, sümbol vms tuleb ühe joonega läbi kriipsutada. Paranduste tegemine eksamitöös ei alanda ülesande lahenduse eest saadavate punktide arvu.
8. Mustandileht on ülesande lahenduse plaani kavandamiseks, jooniste visandamiseks jms. Mustandilehele ei ole mõtet kirjutada ülesande üksikasjalikku lahendust, sest eksamitöö hindamisel mustandit ei vaadata (mustandid jäävad kooli).
9. Mis tahes viisil kõrvalise abi kasutamise korral kõrvaldatakse õpilane eksamilt ja töö hinnatakse 0 punktiga.
10. Eksami ajal ei ole üldjuhul lubatud eksamiruumist lahkuda.

Kui tekkis küsimusi, millest eespool toodud alapunktides juttu ei olnud, siis esitage need oma matemaatikaõpetajale.

2. Kuidas vormistada ülesande lahendust?

Ilmselt on sellele küsimusele juba varem koolitundides vastatud, kuid tuletan meelde mõned olulised momendid.

1. Ülesande lahenduskäik peab olema selge ja loogiline. Vajaduse korral kirjutatakse selgitusi või kommentaare, kuid need peavad olema asjakohased, mis aitavad eksamitööd kontrollival inimesel paremini mõista lahenduskäiku. Selgitada tuleb, *miks midagi tehakse*, ja tuleb hoiduda märkustest, kus *kirjeldatakse* seda, mida parasjagu tehti.
2. Kui ülesande lahendamiseks on vaja (või peate vajalikuks) teha jooniseid, siis need tehakse joonestamisvahendite abil (välja arvatud skeemid, asjakohased illustratsioonid vms).
3. Mõningate ülesannete korral (planimeetria, stereomeetria, jaded jms) pannakse kõigepealt kirja antud suurused ja lõppu lisatakse, mida on tarvis leida. Andmetesse kirjutatud tähiseid kasutame ka valemities. Kui võtate kasutusele uue tähise, siis selgitage selle tähendust.
4. Ülesande lahendamisel kasutusele võetud tähised peavad ühtima tähistega valemities. Kui täisnurkse kolmnurga kaatetid on a ja h ning hüpotenuus f , siis Pythagorase teoreem esitatakse kujul $a^2 + h^2 = f^2$.
5. Võrrandite (murdvõrrand, eksponent- ja logaritmivõrrand, juurvõrrand, trigonomeetiline võrrand) lahendeid on mõistlik kirjalikult kontrollida. Sellega välistame võõrlahendite kirjutamise vastusesse.
6. Tekstülesannete lahendamisel tuleb teha leitud lahendi(te) sisuline kontroll **ülesande teksti järgi**. Sellega välistame tekstiga mitte kooskõlas olevad võrrandi(te) lahendid või sisuliselt absurdset tulemusi.
7. Geomeetriaülesannete puhul peab joonis olema kooskõlas ülesande tekstiga (rombi asemel ei tohi olla ruut; ülesande tekstis esinev termin „kolmnurk“ ei tähenda seda, et tegemist on täisnurkse või võrdhaarse kolmnurgaga jne). Joonis **peab olema** piisavalt suur, et seda saaks kasutada ülesande lahendamisel.
8. Eksamitöös ülesannete juures olevaid jooniseid võib täiendada, uut joonist ei pea tegema.
9. Võimaluse korral ärge poolitage avaldist (võrrandit). Kui poolitate, siis tehtemärgi või võrdusmärgi kohalt, korrates märki uue rea alguses. Sulgudes olevat avaldist ei poolitata.
10. Iga ülesande lahendamine lõpeb vastuse kirjutamisega. Vastusesse tuleb kirjutada ainult need tulemused, mida ülesande tekstis küsiti.
11. Enne eksamitöö äraandmist vaadake hoolega üle kogu töö, et lahendatud oleksid kõik ülesanded, tehtud vajalikud kontrollid ja kirjutatud ülesannete vastused.

Eksamil lahendage kõigepealt need ülesanded, mida oskate kõige paremini lahendada!

3. Näidislahendused

1. Algebraised avaldised

Lihtsustame avaldise $\frac{\sqrt{a+4}}{\sqrt{a-4}} - \frac{\sqrt{a-4}}{\sqrt{a+4}} - \frac{1}{a-16}$.

Lihtsamate avaldiste puhul ei ole mõtet ülesannet lahendada osade kaupa. Kui ruumi on, tuleb eraldi kirjutada ka vastus. Kui ruumi napib, siis piisab vastuse markeerimisest, st tõmbame vastusele alla näiteks kaks joont.

$$\begin{aligned} & \frac{\sqrt{a+4}}{\sqrt{a-4}} - \frac{\sqrt{a-4}}{\sqrt{a+4}} - \frac{1}{a-16} = \\ & = \frac{\sqrt{a+4}}{\sqrt{a-4}} - \frac{\sqrt{a-4}}{\sqrt{a+4}} - \frac{1}{(\sqrt{a-4})(\sqrt{a+4})} = \\ & = \frac{(\sqrt{a+4})(\sqrt{a+4}) - (\sqrt{a-4})(\sqrt{a-4}) - 1}{(\sqrt{a-4})(\sqrt{a+4})} = \\ & = \frac{a+4\sqrt{a}+4\sqrt{a}+16 - a+4\sqrt{a}+4\sqrt{a}-16-1}{(\sqrt{a-4})(\sqrt{a+4})} = \\ & = \frac{16\sqrt{a}-1}{a-16} \end{aligned}$$

Kui olete harjunud murdude laiendajaid kirjutama, siis tehke seda ka eksamitöös.

Vastus. Avaldis lihtsustub kujule $\frac{16\sqrt{a}-1}{a-16}$.

Lihtsustame avaldise $\left(\frac{16}{x+5} + x - 5\right) : \frac{(x^2-9)(x+5)}{x^2+6x+5}$ ja arvutame selle väärtuse, kui $x = \frac{1}{2} \cos 60^\circ$.

Pikemate ülesannete puhul on mõistlik ülesanne jagada osadeks. Seda tüüpi ülesannete puhul ei ole vaja lisada selgitusi, kui just ei lahendata ülesannet mõnel mitte-traditsioonilisel viisil.

$$\begin{aligned} \text{I} \quad & \frac{16}{x+5} + x - 5 \stackrel{(x+5)}{=} \frac{16+x^2+5x-5x-25}{x+5} = \frac{x^2-9}{x+5} \\ \text{II} \quad & \text{Tegurdam } x^2+6x+5. \\ & \text{Lahendan võrrandi } x^2+6x+5=0, \\ & x_{1,2} = -3 \pm \sqrt{9-5} = -3 \pm 2; \quad x_1 = -5; \quad x_2 = -1. \\ & x^2+6x+5 = (x+5)(x+1) \\ \text{III} \quad & \frac{x^2-9}{x+5} : \frac{(x^2-9)(x+5)}{(x+5)(x+1)} = \frac{\cancel{(x^2-9)}(x+5)(x+1)}{\cancel{(x+5)}\cancel{(x^2-9)}(x+5)} = \frac{x+1}{x+5} \\ & \text{Kui } x = \frac{1}{2} \cos 60^\circ = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = 0,25, \text{ siis} \\ & \frac{x+1}{x+5} = \frac{0,25+1}{0,25+5} = \frac{1,25}{5,25} = \frac{5}{21} \\ \text{Vastus.} \quad & 1) \frac{x+1}{x+5}; \quad 2) \frac{5}{21} \end{aligned}$$

Taandamisel tuleb arv 1 kindlasti kirjutada murru lugejasse ja nimetajasse.

Kui avaldis sisaldab astmeid või juuri, siis on mõistlik need väärtuste kujule (kõik astmeteks või juurteks) ja vastavad tehted teha eraldi.

Lihtsustage avaldis $\frac{2^{2x+1} \cdot 4^{x-0,5}}{\sqrt{16^{2x}} \cdot 2^{-3}}$.

$$2^{2x+1} = 2^{2x} \cdot 2, \quad 4^{x-0,5} = (2^2)^{x-0,5} = 2^{2x-1} = \frac{2^{2x}}{2},$$

$$\sqrt{16^{2x}} = (16^{2x})^{\frac{1}{2}} = 16^x = 2^{4x},$$

$$2^{-3} = \frac{1}{2^3}.$$

Saab lihtsamalt: teisendage ühe ja sama arvu astmeteks ja kasutage astmete korrutamise ja jagamise valemiteid.

Lihtsustatud avaldise

$$\frac{2^{2x+1} \cdot 4^{x-0,5}}{\sqrt{16^{2x}} \cdot 2^{-3}} = \frac{2^{2x} \cdot 2 \cdot \frac{2^{2x}}{2}}{2^{4x} \cdot \frac{1}{2^3}} = \frac{8 \cdot 2^{4x}}{2^{4x}} = 8.$$

Vastus. Antud avaldis on lihtsustatud kujul võrdne arvuga 8.

2. Võrrandid, võrratused ja vastavad süsteemid

Lineaar- ja ruutvõrrandil ei pea tegema lahendi kontrolli (kui seda ei nõuta ülesande tekstis). Soovi korral võib teha. Kõikide teiste võrrandiliikide puhul (murdvõrrandid, juurvõrrandid, logaritmvõrrandid ja trigonomeetrilised võrrandid) on saadud lahendikandidaate vaja kontrollida, sest võrrandite lahendamisel ei kasutata ainult samasusteisendusi ja seetõttu võivad tekkida ka väärtused. Neid vastusesse ei kirjutata.

Tekstülesannete puhul tuleb teha teksti järgi sisuline kontroll, et kõrvaldada ülesande sisuga mitte sobivad võrrandi lahendid.

Lahendame võrrandi $\frac{12x+24}{x^2-9} + \frac{7+x}{3-x} = \frac{5x}{x+3}$.

Murdvõrrandi lahendamisel ei pea kõiki liikmeid tooma ühele poole võrdusmärgi. Kasutades võrrandi omadusi, saab lahendeid leida ka lihtsamalt, kuid sel juhul peab kindlasti fikseerima tundmatu keelatud väärtused (mille korral murru nimetaja muutub nulliks). Kõrvaloleva näite puhul ei ole lahendi kontroll vajalik.

$$\frac{12x+24}{x^2-9} + \frac{7+x}{3-x} = \frac{5x}{x+3}$$

$$\frac{12x+24}{(x-3)(x+3)} - \frac{7+x}{x-3} = \frac{5x}{x+3} \quad \left| \cdot (x+3)(x-3) \right.$$

$$12x+24 - (7+x)(x+3) = 5x(x-3)$$

$$12x+24-7x-21-x^2-3x = 5x^2-15x$$

$$-6x^2+17x+3=0 \quad | \cdot (-1)$$

$$6x^2-17x-3=0$$

$$x_{1,2} = \frac{17 \pm \sqrt{289+4 \cdot 6 \cdot 3}}{12} = \frac{17 \pm 19}{12}$$

$$x_1 = 3 \text{ (võrrandil),}$$

$$x_2 = -\frac{1}{6}.$$

Vastus. $x = -\frac{1}{6}$.

Kui Te varem sellist lahendamise meetodit ei ole kasutanud, siis tasub eksamitöös teha nii, nagu olete koolis õppinud.

1. Eksponentvõrrandi lahendamisel on kerge näha, et arvud 9 ja 27 on arvu 3 astmed. Seetõttu on hea, kui õpilane teab peasti mõningaid arvu 2 ja 3 astmeid. Lahendi kontroll ei ole otseselt vajalik, kuid enda rahustuseks võib seda teha.
2. Logaritmivõrrandi puhul on mõistlik leida võrrandi määramispiirkond ja seejärel võib asuda võrrandit lahendama. Tasub meelde jätta, et $\log x^2$ ja $\log^2 x$ pole samaväärsed, küll on seda $(\log x)^2$ ja $\log^2 x$.

Lahendage võrrand:

1. $9^{x+2} - \frac{1}{27} = 0$.
2. $\log x^2 = \log 2 + \log(x+4)$.

1. $9^{x+2} - \frac{1}{27} = 0$, Kontroll:
 Kui $x = -3,5$ siis
 $vp = 9^{-3,5+2} - \frac{1}{27} =$
 $= 9^{-\frac{3}{2}} - \frac{1}{27} =$
 $= \frac{1}{(\sqrt{9})^3} - \frac{1}{27} = 0$,
 $pp = 0$ ja $vp = pp$.

$(3^2)^{x+2} = \frac{1}{27}$
 $3^{2x+4} = 3^{-3}$
 $2x+4 = -3$
 $2x = -7$
 $x = -3,5$

2. $\log x^2 = \log 2 + \log(x+4)$
 Kuna $\log a + \log b = \log(ab)$, siis
 $\log x^2 = \log[2(x+4)]$, millest
 $x^2 = 2x + 8$,
 $x^2 - 2x - 8 = 0$,
 $x_{1,2} = 1 \pm \sqrt{1+8} = 1 \pm 3$,
 $x_1 = -2$; $x_2 = 4$.

Kontroll:

- 1) Kui $x = -2$, siis $vp = \log(-2)^2 = \log 4$,
 $pp = \log 2 + \log(-2+4) = \log 2 + \log 2 =$
 $= 2 \log 2 = \log 2^2 = \log 4$. $vp = pp$.
- 2) Kui $x = 4$, siis $vp = \log 4^2 = \log 16$, $pp = \log 2 + \log 8 =$
 $vp = pp$

Vastus. 1. $x = -3,5$ 2. $x_1 = -2$; $x_2 = 4$.Lahendame võrrandi $\sqrt{x-2} + \sqrt{11-x} = 3$.

Juurvõrrandi lahendamisel
 teeme lahendi kirjaliku
 kontrolli.

$\sqrt{x-2} = 3 - \sqrt{11-x} \quad |)^2$
 $x-2 = 9 - 6\sqrt{11-x} + 11-x$,
 $2x-22 = -6\sqrt{11-x} \quad | :(-2)$
 $11-x = 3\sqrt{11-x} \quad |)^2$
 $121-22x+x^2 = 9(11-x)$,
 $x^2-13x+22=0 \Rightarrow x_1=2; x_2=11$.

Kontroll: 1) kui $x=2$, $vp = 0 + \sqrt{9} = 3 = pp$,
 2) kui $x=11$, $vp = \sqrt{9} + 0 = 3 = pp$.

Vastus. $x_1 = 2$; $x_2 = 11$.

Võrratuste ja võrratustesüsteemide lahendamisel on oluline, et õpilane oskab esitada lahendihulka graafiliselt ja joonisel nõutud piirkonnad õigesti välja lugeda.

Teksti tuleb tähelepanelikult lugeda, et mitte kirjutada vastuseks võrratustesüsteemi lahendihulka, vaid üksnes täisarvulised lahendid.

Lahendage võrratustesüsteem

$$\begin{cases} 5 - 2x < x - |2 - 5| \\ \frac{3x - 3}{6} \leq 4 - \frac{x + 1}{2} \end{cases}$$

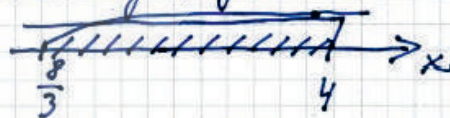
ja leidke selle võrratustesüsteemi kõik täisarvulised lahendid.

Lahendan mõlemad süsteemis olevad võrratused, leian lahendihulgad L_1 ja L_2 ning võrratustesüsteemi lahendiks on $L = L_1 \cap L_2$.

$$\begin{aligned} 1) \quad & 5 - 2x < x - |2 - 5|, \\ & 5 - 2x < x - 3; \\ & -2x - x < -3 - 5, \\ & -3x < -8 \quad | : (-3) \\ & \underline{\underline{x > \frac{8}{3}}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2) \quad & \frac{3x - 3}{6} \leq 4 - \frac{x + 1}{2} \quad | \cdot 6 \\ & 3x - 3 \leq 24 - 3(x + 1) \\ & 3x - 3 \leq 24 - 3x - 3 \\ & 3x + 3x \leq 24 - 3 + 3 \\ & 6x \leq 24 \quad | : 6 \\ & x \leq 4 \end{aligned}$$

Märgin lahendihulgad joonisele



$L = (\frac{8}{3}; 4]$, selles pooldiis on täisarvud 3 ja 4.

Vastus. Täisarvulised lahendid on 3 ja 4.