

Väike protsendiraamat

Regina Reinup

Regina Reinup

Väike protsendiraamat

Retsenseerinud Lea Lepmann, Vilve Lepik
Toimetanud Tarvo Siilaberg
Keeletoimetanud Sven Saun, Piret Pöldver
Kujundanud ja joonised teinud Heisi Väljak

Fotod ja illustratsioonid

Shutterstock: Dmitri Ma (12); Alla Ushakova (15 ülal); Vorobyeva (15 all); Irina Fisher (16 ülal); Dionisvera (16 keskel); Elenamiv (16 all); Tungphoto (18 ülal); Andreas Altenburger (23); Africa Studio (24; 59); DenisNata (25); Duda Vasilii (26); LStockStudio (27); Ermolaev Alexander (32); OPOLJA (36); Francois Poirier (38); Ribah (42); Valentina Proskurina (45); Karkas (46); kurtcan (47); rzstudio, Teguh Mujiono (48); zentilia (51); Christian Jung (58, all); Real Illusion (67 vasakul); Julien Tromeur (67 paremal).

Mauruse pildikogu: Regina Reinup (13 ülal ja all; 18 all); Heisi Väljak (14; 58 ülal; 63; 83).

Wikimedia: William Cherowitzo (11)

ISBN 978-9949-9455-9-7

Autoriõigus: Maurus kirjastus OÜ

Esmatrükk 2014

Juurdetrükk 2018

Põhikooli lõpueksami ülesannete autoriõigus: SA Innove

Tartu mnt 74, 10144 Tallinn, tel 5919 6117

www.kirjastusmaurus.ee

tellimine@kirjastusmaurus.ee

Kõik õigused käesolevale väljaandele on seadusega kaitstud. Ilma autoriõiguse omaniku kirjaliku loata pole lubatud ühtki selle väljaande osa paljundada ei mehaaniliselt ega muul viisil.

EESSÕNA

Protsentide teema on üks esimesi raskemaid teemasid põhikooli matemaatikas, millega näevad vaeva paljud õpilased. Ometi on protsendid igapäevaeluga väga tihedalt seotud ja nendega sina peal olles on kindlasti lihtsam toime tulla ka argielus. Kuidas jaguneb brutopalk või milliseks kujuneb laenu tagasimaksmine, kuidas lugeda toiduaine etiketilt välja vajalikku infot või segada kokku paraja kangusega äädikamarinaad – need teemad pole pärit eksamitöödest, vaid meie igapäevaelust.

Olen ise tegev matemaatikaõpetaja ning protsentõpetus on ka minu doktoritöö teema Tallinna Ülikoolis. Muu hulgas on minu eesmärgiks olnud välja selgitada, miks siis ikkagi protsentõppe paljudele õpilastele nii raske on ning mida õpetamise juures muuta, et olukord paraneks.

Üheks raskuste põhjuseks on kahtlemata üleminek absoluutselt matemaatiliselt mõtlemiselt suhtelisele mõtlemisele. Iga inimene areneb erinevalt ja seda, millal keegi omandab suhtelise mõtlemise oskuse, ei oska keegi täpselt öelda. Mõne õpilase jaoks on kõik arusaadav juba kuuendas klassis, teise jaoks ei saabu selgus veel seitsmendaski. Mitterõõustumise puhul on õnnatud nii lapsed ise, nende vanemad kui ka õpetajad. Otsitakse lihtsaid võimalusi, kuidas lastele arusaamatu protsentõppe ikkagi arusaadavaks teha; seda tihti nii drillimeetodil kui ka puhtmehaaniliste võtete õpetamisega. Matemaatikas on aga pähetuubitud valemitest vähe kasu, alati tuleks püüelda mõistmise poole. Selleks, et protsentide teemat arusaadavamaks teha, olen „Väikeses protsendiraamatus” teadlikult püüdnud vältida algebralisi valemeid ja asendanud need sõnaliste reeglitega. Samuti olen üritanud teema avamisel kasutada suhteliselt lihtsat keelt.

Teiseks protsentõppe keerukuse põhjuseks on selle teemaga seonduv puudulik eestikeelne sõnavara ja osaliselt mittejuurdunud mõisted. Eesti Vabariigi algusaastatel, mil emakeelse hariduse arendamise ajajärgul loodi ka emakeelset matemaatilist sõnavara, võeti selle aluseks erinevaid allikaid. Muu hulgas kasutati ka tol ajal juba olemas olnud saksa-soome matemaatika sõnaraamatut, kust ilmselt on pärit mõiste *osamäär* (soomekeelne *osamäärä* on jagatis). Julgen väita, et see mõiste ei ole eesti õpilaste hulgas juurdunud nüüdseks pea saja

aasta vältel. Kahjuks pole ka *osamäära* asemele midagi head pak-
kuda. Olen oma õpilastega mõnikord kasutanud *osamäära* asemel
sõna *osakaal*, mida võib eesti keeles seostada sellega, kui suur on
osa kaalukus ehk tähtsus tervikust. Seda on aga keeruline juurutada
olukorras, kus kõik matemaatika õpikud kasutavad mõistet *osamäär*.
Nii olen selle raamatu esimeses osas jäänud siiski *osamäära* juurde,
pühendades aega ja ruumi selle mõiste uuesti selgitamisele. Lisaks
*osamäär*ale pakun raamatu teises osas välja uue mõistena *laensõna*
soome keelest – *protsentkordaja* (soome *k prosenttikerroin*). Sõna ise
on küll pikk, kuid loodan, et siult mõistetavam kui *osamäär* – viitab
ta ju sellele, et protsendid on muudetud kordajaks, mida seejärel teh-
tes kasutame. Selle mõiste kasutusele võtmine võimaldas väljendada
sõnaliselt ka keerulisemaid algebralisi valemeid, näiteks liitintressi
juures kasutatav suhteliselt pikk algebraline

väljend $(1 + \frac{p}{100})$ on protsentkordaja.

Protsentõpetuse terminoloogias valitseb teisigi ebamäärasusi.
Protsente nimetatakse vaheldumisi nii protsentideks, protsendi-
määraks kui ka osamääraks. Selline paralleelmõistete olemasolu
suurendab segadust õpilaste hulgas. Käesolevas raamatus lähtun
seisukohast, et protsendid koos harilike murdude ja kümnendmurdu-
dega on üks kolmest osamäära kujust.

Samas sain endalegi üllatuseks alles selle raamatu kirjutamisel teadli-
kuks asjaolust, et arvulisele näitajale protsendimärgi ees ei olegi oma
nimetust. Valemites on see kirjas kui $p\%$ – aga kuidas seda p -d eesti
keeles nimetada? J. Reimandi ja K. Velskeri „Valemeid matemaati-
kast” (Koolibri 1999) annab peatüki „Protsendid” alguses selgituse:

p – protsentmäär (osamäär protsentides), protsent.

Seega on jällegi antud üheaegselt mitu vastet. Veidi edasi antakse
valem sõnalisel kujul:

$p\%$ arvust a on $p \cdot a/100$.

Siit tuleb ikkagi välja, et p on protsendimärgi ees olev arvuline suurus. Kuna vajasin sõnaliste reeglite väljakirjutamisel konkreetseid vaseid, siis „Väikeses protsendiraamatus” on kasutusel p kui *protsendimäär* ja $p\%$ (koos protsendimärgiga) – *protsent*.

Oma kogemuste põhjal võin öelda, et mõningate tehete sooritamine sündmuste toimumise ajalises järjekorras on õpilastele kergemini mõistetav – alguses on meil teada mingi suurus, seejärel teostame sellega teatud tehte, millega jõuame lõpptulemuseni. Samale loogikale põhinedes on koostatud ka sõnalised reeglid. Seetõttu võivad mõned neist olla üles ehitatud n -ö vales järjekorras võrreldes harjumuspäraste algebraliste valemitega.

Olen protsentõppe ja selle arendamisega tegelenud nüüdseks pea üheksa aastat oma elust. Suur tänu grupikaaslastele projektist „Meile Meeldib Matemaatika”, kellega koos tegin esimesed sammud sellel teel, Tallinna Ülikooli matemaatika metoodika õppejõududele, kelle mõtted on mind selles töös inspireerinud, ning oma doktoritöö juhendajatele. Tänan ka kõiki oma õpilasi ja noort sugulast Cristopheri, kelle arvamusi olen üritanud selle raamatu kirjutamisel arvesse võtta.

Loodan, et suudan oma „Väikese protsendiraamatuga” protsentide teemat õpilastele – aga miks ka mitte nende vanematele – lähemale tuua ning et ka matemaatikaõpetajad saavad sellest raamatust ideid teema lapsedõbralikumaks õpetamiseks. Raamat sobib nii põhikooliõpilastele lisamaterjaliks ja koduõpetajaks kui ka keskkooliõpilastele protsentide teema kordamiseks. Õppimise hõlbustamiseks ja mängulisemaks muutmiseks on raamatule lisatud kaks näitlikku õppevahendit – protsendiketas ja pitsaga taldrik –, mille igaüks endale väikese vaevaga valmis saab meisterdada.

Tere tulemast mõnusale retkele protsentide maailma!

Regina Reinup

SISUKORD

I OSA – PÕHIMÕISTED JA ÜLESANDETÜÜBID	9
Kust on pärit sõna <i>protsent</i> ?	11
Kus protsente kasutatakse?	12
Tervik, osa ja osamäär	14
Osamäära erinevad kujud ja teisendused nende vahel	18
Osa leidmine antud terviku ja protsendi kaudu	23
1% vastava osa leidmine	23
Suurematele protsentidele vastavate osade leidmine	24
Kui kasutad kalkulaatorit	26
Protsendi leidmine antud osa ja terviku kaudu	28
Terviku leidmine antud osa ja protsendi kaudu	30
Terviku leidmine 1% kaudu	30
Kui kasutad kalkulaatorit	31
Võrdluse alus	32
Võrde põhiomadusel ehk risti korrutamise reeglil põhinev lahendus	34
Kui kuidagi meelde ei jää, mis siis?	38
II OSA – RAKENDUSED	41
Hinnamuutus	42
Allahindlusega seotud ülesanded	43
Hinnatõusuga seotud ülesanded	44

Protsentkordaja	45
Uue hinna arvutamine protsentkordaja kaudu	46
Järjestikused muutused	48
Kui kasutad kalkulaatorit	50
Pangas	52
Hoius	52
Laen	54
Kiirlaen	56
Köögis	58
Toiduainete koostis	58
Morss	59
Veesisalduse muutumine toiduainete kuivatamisel	60
Lauaäädika valmistamine	61
Lahused	65
„Metallurgiahuvilistele”	68
Palk ja maksud	70
Protsendid ja protsendipunktid valimistel	73
Veidi statistikast	75
Proovi lahendada	76
Vastused	80
LISA	81
Pitsa ja taldrik	
Protsendiketas	



I OSA – PÕHIMÕISTED JA ÜLESANDETÜÜPID

Kuidas tähistatakse protsenti?



cento

15. sajand



17. sajand



18. sajand

Kust on pärit sõna *protsent*?

Nagu paljude matemaatiliste mõistete puhul, on ka *protsent* pärit kaugest ajaloost, Rooma impeeriumi ajast. See sõna tuleb ladina keelest, kus *per centum* ehk *pro centum* tähendavad tõlkes *saja kohta* ehk *sajast*. Need kaks erinevat algvormi on kaugetest aegadest tulnud tänapäeva keeltesse:

Per centum

- per cento (itaalia)
- per cent (inglise)
- pour cent (prantsuse)
- por cent (hispaania)

Pro centum

- Prozent (saksa)
- prosentti (soome)
- процент (vene)
- protsent (eesti)

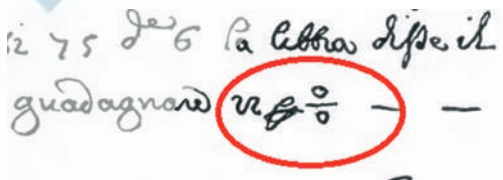
Seega, kui näiteks ütleme

1 *protsent*, siis tähendab see tegelikult 1 (osa) saja (osa) kohta ehk ühte sajast, kui

2 *protsenti*, siis 2 (osa) saja (osa) kohta ehk 2 sajast, kui

3 *protsenti*, siis 3 (osa) saja (osa) kohta ehk 3 sajast, jne.

Matemaatika keeles kasutatakse palju lühendeid ja sümbboleid. Ka protsendiga juhtus nii, et kui varem kirjutati tekstis välja *per cento*, siis 15.–16. sajandi jooksul lühenes see kujule *per c o*, seejärel kujule $p \frac{c}{o}$ ja viimaks jäi järele ainult $\frac{c}{o}$, millest saigi mõne aja möödudes tänapäeval tuntud protsendimärk %.



Joonis 1. Matemaatiline tekst raamatust *Rara Arithmetica* aastast 1684, lk 441.

Joonisel 1 esitatud kirjutusviis meenutab harilikku murdu – ja seda protsent ju tegelikult ongi.
Eeltoodud näites:

Protsent on teistmoodi kirjutatud harilik murd, mille nimetajas on alati sajandikud. Sealjuures on protsent alati seotud mingi tervikuga ja näitab osa suurust sellest.

üks sajast võime kirjutada murdarvuna

$$\frac{1}{100},$$

seega 1% määrab kindlaks $\frac{1}{100}$ suurusele vastava osa mingist tervikust.

Kus protsente kasutatakse?

Kõige esimesed teated protsentide kasutamisest on seotud maksude ajalooaga. Rooma imperaator Julius Caesar kuulutas oma valitsemise ajal välja 1% suuruse müügitaksu. See tähendab, et müügist saadud tulu jagati sajaks võrdseks osaks, üks osa anti riigile ning 99 osa jäi müüjale. Hinnalisema kauba müümisel oli hind suurem ja vastavalt sellele oli suurem ka 1% vastava osa rahaline väärtus.

Ka tänapäeval kasutatakse maksude arvestamisel protsente – näiteks sinu vanemate palgast arvestatakse maha tulumaks, tööandjad jällegi maksavad sotsiaalmaksu. Oled võibolla kuulnud kütuse aktsiisimaksust ja hasartmängumaksust. Makse on teisiigi ja need arvutatakse alati välja mingist teatud summast, näiteks palgast või müügitulust, vastavalt kindlaksmääratud protsentidele.

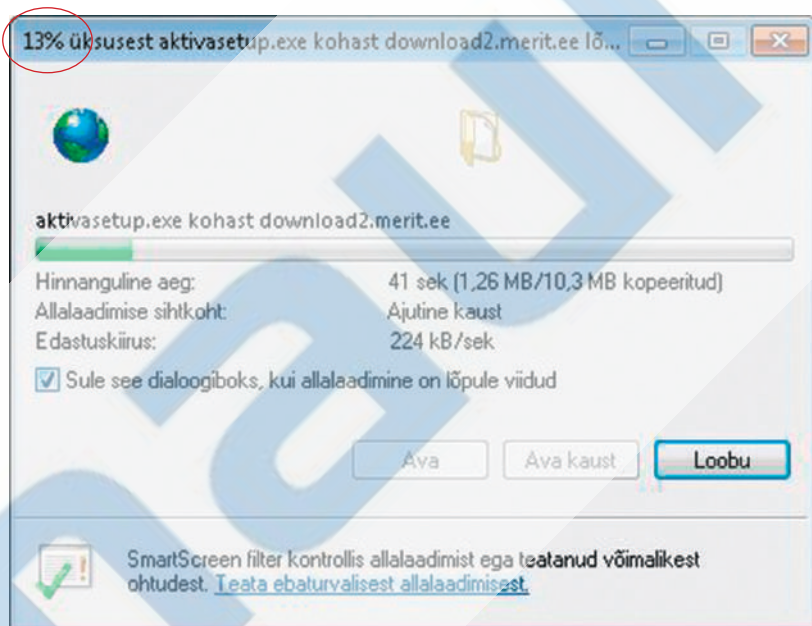
Oled kindlasti märganud allahindlusi, mille ajal reklaamid kaupluste akendel ja kaubariiulitel lubavad näiteks allahindlusi –10%, –15%, –20% või rohkemgi.



Kui uurid kauplustest saadud ostutšekki, võid näha, et kaupade algsele hinnale (summa käibemaksuta) on lisatud käibemaks, mis on 20% sellest.

Arve: 1429053
Teenindaja: 2522
Avatud: 01.01.2013 16:22:33

Nimi	Kogus	Hind	Summa
Kakao 200ml	1PRT	1,44	1,44
KOHUPIIMAPALLID	0,135 KG	9,00	1,22
Summa käibemaksuta			2,22
Käibemaks 20,0%			0,44
Ümardus			0,00
Summa:			2,66
			2,66 EUR



Programmide allalaadimisel kuvatakse ekraanile diagramm, mis näitab, kui suur osa programmist on juba arvutisse laaditud. Toidukaupade etiketidel on sageli kirjas, mitu protsenti nad sisaldavad näiteks rasva, valke, süsivesikuid; mõnikord ka suhkrut, soola või muid koostisaineid.



Kas oled märganud liiklusmärki „Järsk tõus”? See märk hoiatab, et iga 100 meetri kohta tõuseb tee 12 meetrit; 12 saja kohta annab tee kaldeks 12%.

Tihti kasutatakse protsente kõikvõimalike küsitluste kokkuvõtete ja muude statistiliste andmete esitamisel.

Koolist on sulle ehk tuttavad protsendid, mis väljendavad edukust tasemetöös.

Protsente kasutatakse tõenäosuse juures. Oled kindlasti kuulnud väljendit, et midagi on „100% kindel”. See tähendab, et mingi sündmus toimub sajajuhul sajast – ehk pole võimaluski, et see ei toimuks.

Mõtle, kus oled veel protsente märganud.

Tervik, osa ja osamäär

Iga protsentidega seotud situatsiooni – nii elulise olukorra kui ka protsentülesande juurde – kuulub kolm võrdselt tähtsat arvnäitajat, mis väljendavad TERVIKUT, OSA ja OSAMÄÄRA. Sealjuures on osamäär protsentülesannetes tavaliselt esitatud protsendi kujul, kuid vajaduse korral pead oskama seda teisendada kas harilikuks või kümnendmurruks.

Kui kaks nendest kolmest suurustest on antud, on võimalik välja arvutada kolmas. Enne ülesande lahendamise juurde minemist peatu alati hetkeks ja mõtle, millised kaks nendest kolmest on teada ja mida küsitakse. Selguse mõttes soovitan ülesande lahendamise puhul lähteandmed alati välja kirjutada.

TERVIK vastab 100% ja seda nimetatakse ka *võrdluse aluseks*, kuna tihti võrreldakse osa suurust tervikuga. Keerukamates ülesannetes, kus tundub, et tervikuid on justkui kaks – näiteks hinnamuutusega ülesanded, kus algul maksab kaup mingi teatud summa ja hiljem on hinda kas tõstetud või langetatud –, tuleb lähtuda sellest, et **tervik on alati algne suurus** (esialgne hind).

Terviku mõiste on väga tähtis ja on oluline, et sa saaksid aru – tervik võib olla väga erineva suurusega! Võtame terviku näiteks täis morsiklaasi, mis võib olla kas suur, keskmine või väike. Igal kolmel juhul on aga tegemist (erineva suurusega) tervikuga.



OSA sõltub nii tervikust kui ka osamäärast. Terviku ja osa saad kindlaks teha selle järgi, et neil mõlemal on alati sama ühik.

Näide 1. Tervik on 150 g kompvekke ja osa on 30 g kompvekke sellest.



Näide 2. Tervik on korvitäis õunu – lepime näiteks kokku, et 25 õuna – ja osa on 2 õuna nendest.



Näide 3. Tervik on üks õun ja osa on veerand õuna sellest.



Näide 4. Tervik on 10 km ja osa on 2 km pikkune teelõik sellest.



Mõnikord võivad ühikud alguses olla ka erinevad, aga sa saad teha teisenduse, millega need samaks muuta:

Näide 5. Tervik on 6 km ja osa on 600 m sellest.

- Teisenda:
- a) tervik meetriteks – nüüd on tervik 6000 m ja osa 600 m; või
 - b) osa kilomeetriteks – nüüd on tervik 6 km ja osa 0,6 km.

Näide 6. Tervik on kõik ühe klassi õpilased, osa on selle klassi tüdrukud või poisid.

Selle näite puhul saad aru, et ühikuks on selle klassi õpilased.

OSAMÄÄR on jagatis, mis näitab osa ja terviku suhet:

$$OSAMÄÄR = \frac{OSA}{TERVIK}.$$

Osamäär võib esineda hariliku murru, kümnendmurru või protsendi kujul.

Sealjuures hariliku ja kümnendmurru kujul taanduvad välja osa ja terviku ühikud (mäletad, need ühikud olid alati samad!) ning tulemuseks on suhtarv, millel pole mingit ühikut. Näites 2 on kahe õuna osamäär 25 õunast

$$\frac{2 \overset{1}{\cancel{\text{õuna}}}}{25 \underset{1}{\cancel{\text{õuna}}}} = \frac{2}{25} = \frac{8}{100} = 0,08.$$

Kui protsentülesandes on osamäär teisendatud protsendiks, nimetatakse numbrilist osa *protsendimääraks* ja selle juurde kuulub lahutamatu osana *protsendimärk* %. Eelmises näites 2 õuna 25 õunast on 8%.

Lepime kokku protsendiga seotud mõisted:



Seega, õige on näiteks teisendus

$$0,08 = 8\% \text{ (ehk 8 sajandikku).}$$

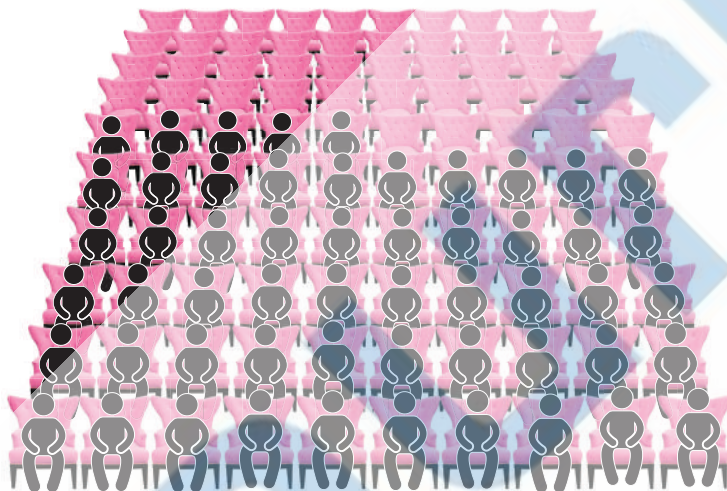
Kui jätad protsendimärgi lisamata, tuleb välja, justkui kehtiks võrdus $0,08 = 8$, see aga pole tõene, sest $0,08 \neq 8$.

On väga oluline, et sa ei unustaks protsendimäärale lisada protsendimärki, sest ainult nii on teisendus osamäärast protsendiks tõene – protsendimärk annab teada, et tegemist on sajandikosadega.

Osamäära erinevad kujud ja teisendused nende vahel

Kõige lihtsamad teisenduste seisukohalt on muidugi sellised juhtumid, kus tervik on 100.

Näiteks – mitu protsenti kinosaalist on täidetud?

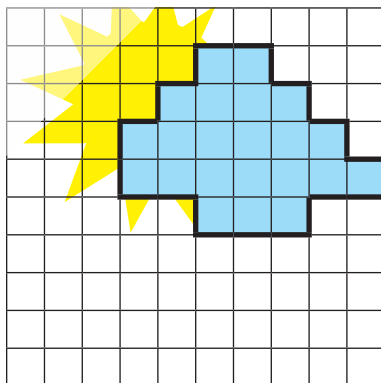


Täidetud on 55 kohta sajast ehk 55% ($\frac{55}{100} = 0,55 = 55\%$).

Või – kui suur on pilves ilma tõenäosus protsentides?

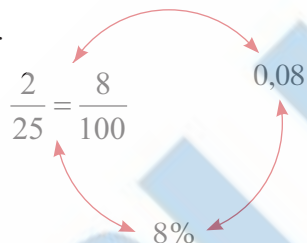
Vastus on 22%. Miks?

Päriselus tuleb selliseid näiteid ette väga harva, sellepärast pead oskama osa ja terviku suhet kümnendmurruks ja protsendiks teisendada.



Eelmise peatüki näites õuntega oli osamäär

$$\frac{2}{25} = \frac{8}{100} \text{ ehk } 8 \text{ sajast.}$$



Nagu sa tead, võime sõna sajast asendada protsendimärgiga ehk

$$\frac{8}{100} = 8\%.$$

Teisendades hariliku murru kümnendmurruks, saame

$$\frac{2}{25} = \frac{8}{100} = 0,08.$$

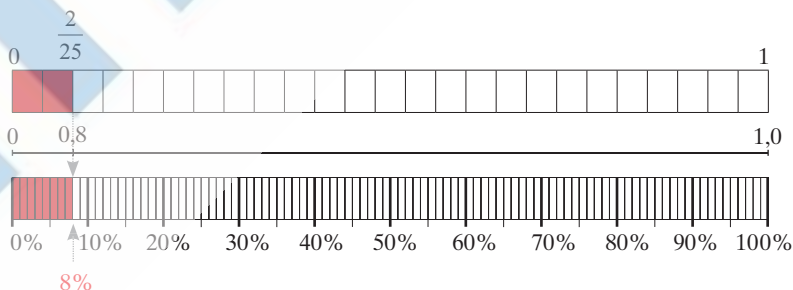
Arvus 0,08 on number 8 sajandike kohal ja võime sedagi arvu lugeda 8 sajandiku ehk 8%:

$$0,08 = 8\%.$$

Kui osamäär on antud hariliku murru kujul ja seda on võimalik laiendada nii, et nimetajas on sajandikud, siis tee seda. Sel juhul on protsendimäär murru lugejas.

Nimetaja $\frac{\quad}{100}$ asenda protsendimärgiga.

Kui osamäär on antud kümnendmurru kujul, siis selle protsendiks teisendamisel korruta osamäär sajaga ja lisa protsendimärk.



Kõige olulisematel osamääradel on olemas ka sõnalised vasted: veerand, pool, kolmveerand, terve.

	harilik murd	kümnendmurd	protsent
veerand	$\frac{1}{4}$	0,25	25%
pool	$\frac{1}{2}$	0,5	50%
kolmveerand	$\frac{3}{4}$	0,75	75%
terve	$\frac{1}{1}$	1	100%

