

Silvia Pajus, Tauri Viil

MATEMAATIKA TÖÖRAAMAT
9. KLASSILE

Tere!

Mauruse 9. klassi matemaatika õppevara koosneb kahest osast: siinsest tööraamatust ja haridusportaalil TaskuTark asuvast digilisast „Videod 9. klassi matemaatika tööraamatu juurde“. Eesti haridusasutustele pakume paketti, iseõppijatel on võimalus kumbki osa eraldi osta.

Tööraamat aitab sul selgeks saada kõik 9. klassi matemaatika teemad. Nagu 7. ja 8. klassi tööraamatud nii sisaldab ka 9. klassi tööraamat eneseanalüüsi meetodeid, et sul oleks võimalus areneda ennastjuhtivaks õppijaks.

Tööraamat koosneb viiest peatükist, milles on kokku **12 teemat**. Ühes peatükis on kaks või kolm teemat. **Kooliastme võtmeoskuste kokkuvõtte** leiad kuuendast peatükist ja seitsmendast peatükist on ülesandeid üldiseks kordamiseks.



Iga teema algab **uute teadmiste nimekirjaga**. See annab ülevaate sellest, mida peatüki lõpuks oskad. Kui oled teema läbinud, pöördu tagasi ja märgi omandatud teadmised ja oskused. Värv iga õpioskuse juures olev lahter sobivat värvi.

Roheline	Kollane	Punane
Oskan hästi!	Pean veel harjutama.	Ei saa üldse hakkama.



Uute teadmiste nimekirjale järgneb **eelteadmiste tabel**, kus on kirjas, mis teadmised on selle teema läbimiseks vajalikud. Enne õppima asumist hinda oma varasemaid teadmisi ja värvi iga õpioskuse juures olev lahter sobivat värvi.



Eelteadmiste testi abil saad kontrollida valmisolekut uueks teemaks. Testi ülesanded vastavad eelteadmiste nimekirjas olevatele õpitulemustele. Kui lahendad testi edukalt, oled valmis uueks teemaks. Kui jääd mõne ülesandega hätta, siis võta aega ja korda vastav teema üle.

Teoorialeheküljele on koondatud uue teema olulisemad reeglid ja mõisted. Sealt leiad ka QR-koodid, mis viivad TaskuTarga digilisas asuvate selgitavate videote juurde. Siin tuleks koos õpetajaga kõik seaduspärasused läbi mõelda, et tekiks terviklik teadmiste süsteem.

Näidisülesannete leheküljel on lisaks lahendustele QR-koodid, mis viivad TaskuTarga digilisas asuvate videote juurde, kus selgitatakse ja põhjendatakse iga näidisülesande lahenduskäiku. Oma oskuste lihvimiseks kirjuta ülesanded vihikusse ja lahenda uuesti.

Ülesanded on jaotatud A-, B- ja C-osadeks. Iga osa viib sammhaaval edasi: alustades algtasemest, liigume avatud ja laiemaid seoseid loovate ülesanneteni.



A-osas on ülesanded õpitulemuste kaupa, mille abil saad harjutada uute teadmiste rakendamist.



B-osas on ülesanded, mille lahendamiseks tuleb sul kasutada mitmeid uusi teadmisi ja oskusi, valides sobiva meetodi või valemi.



C-osas on ülesanded, mille lahendamiseks tuleb lisaks uutele teadmistele kasutada ka juba varem õpitud teadmisi ja seoseid nende vahel.

Lisaks on ülesanded **harjutamiseks**. Need on lisaülesanded kiirematele või kodus tegemiseks.



Teema lõpeb **enda teadmiste analüüsimisega**. Ava teema alguses olev uute teadmiste nimekiri ja hinda oma teadmisi, värvides viimane lahter sobivat värvi. Kui kasutasid punast rohkem kui korra, siis võta aega ja keskendu veel kord teema õppimisele!



Iga peatükk lõpeb testiga, mille abil saad kontrollida, kui hästi oled omandanud uued teadmised. Testi vastused leiad tööraamatu lõpust.

Ole õppimisel tähelepanelik ja harjuta nii palju kui võimalik – siis näed matemaatika ilu ja võlu!

Silvia Pajus ja Tauri Viil

autorid

SISUKORD

Sissejuhatus	2
1. RUUTVÖRRAND	4
1.1. Ruutvõrrandi mõiste	6
1.2. Ruutvõrrandi lahendamine	16
1.3. Probleemülesannete lahendamine ruutvõrrandi abil	24
2. RUUTFUNKTSIOON	36
2.1. Ruutfunktsiooni mõiste	38
2.2. Funktsioonide uurimine arvutiprogrammide abil	48
3. RATSIONAALAVALDISED	58
3.1. Algebraliste murdude korrutamine, jagamine ja astendamine	60
3.2. Algebraliste murdude liitmine ja lahutamine	70
4. TÄISNURKNE KOLMNURK	86
4.1. Pythagorase teoreem	88
4.2. Täisnurkse kolmnurga lahendamine	96
5. RUUMILISED KUJUNDID	108
5.1. Püstprisma ja püramiid	110
5.2. Silinder, koonus ja kera	120
5.3. Ruumiliste kujundite kohta käivate probleemülesannete lahendamine	130
6. III KOOLIASTME VÕTMEOSKUSTE KOKKUVÕTE	142
6.1. Protsentülesannete lahendamine	144
6.2. Andmestiku iseloomustamine	146
6.3. Tõenäosuse arvutamine	147
6.4. Astendamisreeglite kasutamine	148
6.5. Täisavaldiste lihtsustamine	149
6.6. Ratsionaalavaldiste lihtsustamine	150
6.7. Lineaar- ja võrdkujuliste võrrandite lahendamine	151
6.8. Lineaarvõrrandisüsteemide lahendamine	152
6.9. Ruutvõrrandite lahendamine	153
6.10. Tekstülesannete lahendamine võrrandi abil	154
6.11. Funktsiooni graafiku joonestamine	155
6.12. Funktsiooni graafiku asendi ja kuju kirjeldamine	157
6.13. Sirgete paralleelsuse tunnuste kasutamine	158
6.14. Kolmnurkade sarnasuse tunnuste kasutamine	159
6.15. Pythagorase teoreemi rakendamine	160
6.16. Trigonomeetriliste seoste kasutamine	161
6.17. Tasandiliste kujundite ümbermõõdu ja pindala arvutamine	163
6.18. Ruumiliste kujundite pindala ja ruumala arvutamine	164
7. ÜLESANDED ÜLDISEKS KORDAMISEKS	166
Vastused	177

1. RUUTVÕRRAND

1.1. Ruutvõrrandi mõiste

Arvu ruutjuur

Ruutvõrrandi liigid

Ruutvõrrandi normaalkuju

1.2. Ruutvõrrandi lahendamine

Mittetäieliku ruutvõrrandi lahendamine

Täieliku ruutvõrrandi lahendivalem

Taandatud ruutvõrrandi lahendivalem

Viète'i teoreem

1.3. Probleemülesannete lahendamine ruutvõrrandi abil

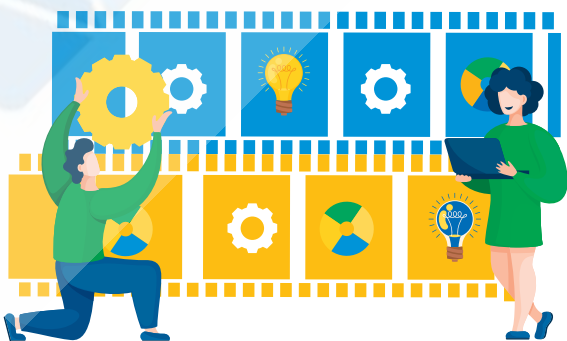
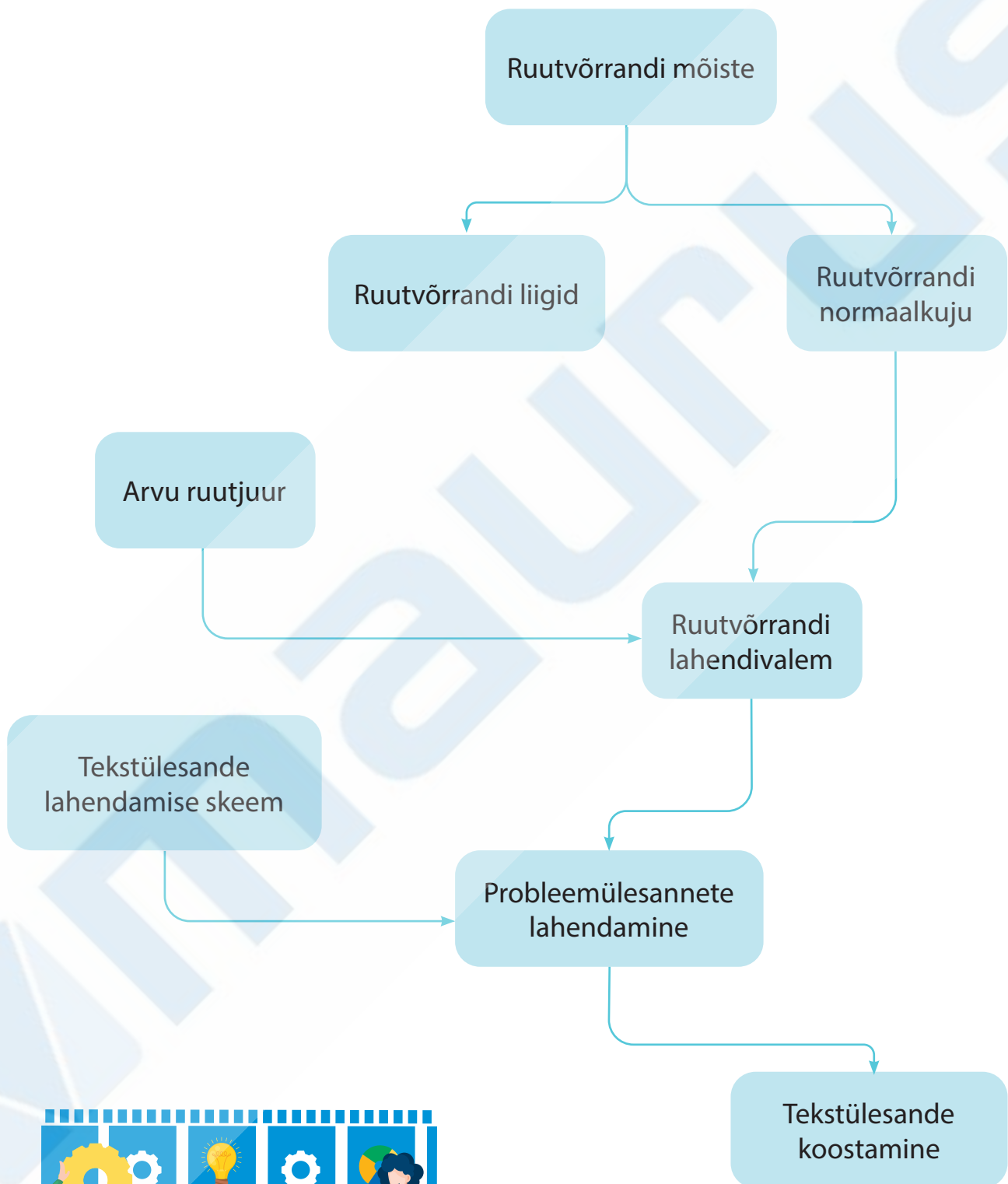
Tekstülesande lahendamise skeem

Tekstülesannete koostamine

RUUTVÕRRAND

MÕTTEKAART

Täienda õppimise käigus mõttekaarti valemite, näidete ja joonistega.



1.1. RUUTVÖRRANDI MÕISTE

Ruudukujuline terrass

Vanaisa plaanib ehitada ruudukujulise terrassi, mille jaoks tahab ta ära kasutada eelmisest projektist üle jäänud 3,9 m pikkused terrassilauad. Ühe sellise terrassilaua laius on 12 cm ning kokku on tal 26 lauda.

Milliste mõõtmetega ruudukujulise terrassi saab nende laudadega ehitada?



Siit leiad nimekirja peatüki teadmistest ja oskustest.

Kui peatükk läbitud, siis hinda oma teadmisi siin.

 Selle peatüki lõpuks ...	
1. Selgitan arvu ruutjuure tähendust.	
2. Leian peast mõne arvu ruutjuure.	
3. Leian taskuarvutil arvu ruutjuure kümnendlähendi.	
4. Leian ruutjuurt korrutisest ja jagatisest.	
5. Toon teguri juuremärgi ette ja viin teguri juuremärgi alla.	
6. Eristan ruutvõrrandit teistest võrranditest.	
7. Nimetan ruutvõrrandi liikmed ja nende kordajad.	
8. Viin ruutvõrrandeid normaalkujule.	
9. Liigitan ruutvõrrandeid täielikeks ja mittetäielikeks.	
10. Taandan ruutvõrrandi.	

Uue teema õppimiseks peavad sul mitmed varasemad teemad selged olema.

Hinda oma eelteadmisi. Värvilahter sobivat värvi.

 Enne selle peatüki õppimist ...	
1. Leian arvu ruudu.	
2. Leian arvu tegurid ja kordsed.	
3. Ümardan arvu etteantud järguni.	
4. Lahendan lineaarvõrrandi, kasutades võrrandi põhiomadusi.	
5. Kasutan korrutamise abivalemeid.	

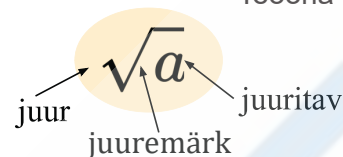
PÕHIREEGLID. RUUTVÕRRANDI MÕISTE

Mida paremini tead põhireegleid, seda lihtsam on sul ülesandeid lahendada.



Teooria 1.1.

Mittenegatiivse arvu a ruutjuureks $\sqrt{a}$ nimetatakse mittenegatiivset arvu b , mille ruut on antud arv a . $\sqrt{a} = b \leftrightarrow b^2 = a$

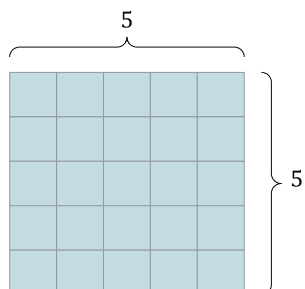


Ruutjuurt saab leida **mittenegatiivsetest arvudest**,

sest ei leidu sellist arvu, mille ruut oleks negatiivne.

Näiteks $\sqrt{-4}$ ei saa leida, sest ei leidu ühtegi ratsionaalarvu b , mille puhul $b^2 = -4$.

Kuid $\sqrt{0} = 0$, sest $0^2 = 0$.



$\sqrt{25} = 5$, sest $5^2 = 25$

$\sqrt{1} = 1$	$\sqrt{4} = 2$	$\sqrt{9} = 3$	$\sqrt{16} = 4$	$\sqrt{25} = 5$
$\sqrt{36} = 6$	$\sqrt{49} = 7$	$\sqrt{64} = 8$	$\sqrt{81} = 9$	$\sqrt{100} = 10$
$\sqrt{121} = 11$	$\sqrt{144} = 12$	$\sqrt{169} = 13$	$\sqrt{196} = 14$	$\sqrt{225} = 15$
$\sqrt{256} = 16$	$\sqrt{289} = 17$	$\sqrt{324} = 18$	$\sqrt{361} = 19$	$\sqrt{400} = 20$

Kui juuritav on naturaalarv, siis on selle väärtuseks naturaalarv või mitteperioodiline kümnendmurd ehk **irratsionaalarv**. Näiteks $\sqrt{4} = 2$, kuid $\sqrt{5} \approx 2,2360679775\dots$

Kui juuritav on murdarv, siis saab selle väärtuseks olla irratsionaalarv või ratsionaalarv.

Näiteks $\sqrt{0,2} \approx 0,4472135955\dots$, kuid $\sqrt{0,25} = 0,5$.

Kui ruutjuure väärtuseks on irratsionaalarv, siis antakse juure väärtus kas täpse väärtusena, näiteks $\sqrt{5}$, või leitakse selle **kümnendlähend**, näiteks $\sqrt{5} \approx 2,2$.

Astme ruutjuur võrdub ruutjuure astmega. $\sqrt{a^n} = (\sqrt{a})^n, a \geq 0$	Näiteks $\sqrt{25^2} = (\sqrt{25})^2 = 25$.
Korrutise ruutjuur võrdub tegurite ruutjuurte korrutisega. $\sqrt{a \cdot b} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b}, a \geq 0, b \geq 0$	Näiteks $\sqrt{2} \cdot \sqrt{50} = \sqrt{2 \cdot 50} = \sqrt{100} = 10$.
Järeldus. Kui ruutjuure märgi all on juuritavaks teguriks positiivse arvu ruut, siis võime tuua selle arvu kordajaks ruutjuure ette. Ja vastupidi: kui ruutjuurel on positiivne kordaja, siis võime viia kordaja ruutjuure märgi alla, tõstes selle kordaja ruutu. $\sqrt{k^2 \cdot a} = k\sqrt{a}, k > 0$. Näiteks $\sqrt{20} = \sqrt{4 \cdot 5} = \sqrt{2^2 \cdot 5} = 2\sqrt{5}$.	
Jagatise ruutjuur võrdub jagatava ruutjuure ja jagaja ruutjuure jagatisega. $\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}, a \geq 0, b \geq 0$	Näiteks $\sqrt{\frac{9}{25}} = \frac{\sqrt{9}}{\sqrt{25}} = \frac{3}{5}$.

Ruutvõrrand on teise astme algebraline võrrand, mille üldkuju on $ax^2 + bx + c = 0$, kus ax^2 on ruutliige kordajaga a , bx on lineaarliige kordajaga b ning c on vabaliige. $a \in \mathbb{Q}, a \neq 0, b \in \mathbb{Q}$ ja $c \in \mathbb{Q}$.

$$\underbrace{ax^2}_{\text{ruutliige}} + \underbrace{bx}_{\text{lineaarliige}} + \underbrace{c}_{\text{vabaliige}} = 0$$

Täielik ruutvõrrand $b \neq 0$ ja $c \neq 0$	Mittetäielik ruutvõrrand $b = 0$ ja/või $c = 0$	Taandamata ruutvõrrand $a \neq 1$	Taandatud ruutvõrrand $a = 1$
$4x^2 - 3x - 1 = 0$	$4x^2 - 1 = 0$	$4x^2 - x + 3 = 0$	$x^2 - 3x + 1 = 0$

Ruutvõrrandi viimine normaalkujule on võrrandi teisendamine kujule $ax^2 + bx + c = 0$.	$3(x^2 + 5x) = 9$ $3x^2 + 15x - 9 = 0$
Ruutvõrrandi taandamine on normaalkujul oleva ruutvõrrandi poolte korrutamine või jagamine ühe ja sama nullist erineva arvuga nii, et ruutliikme kordaja oleks arv 1.	$3x^2 + 15x - 9 = 0 \mid :3$ $x^2 + 5x - 3 = 0$

1.1. NÄIDISÜLESANDED

Püüa aru saada, kuidas ja milliseid reegleid ja valemeid kasutatakse.
Vajadusel kirjuta ülesanded vihikusse.



► Teguri toomine juuremärgi ette

1. Too tegur juuremärgi ette.

Näidisülesanded 1.1.

$$1) \sqrt{54} = \sqrt{9 \cdot 6} = \sqrt{9} \cdot \sqrt{6} = 3\sqrt{6}$$

$$2) \sqrt{72} = \sqrt{36 \cdot 2} = \sqrt{36} \cdot \sqrt{2} = 6\sqrt{2}$$

$$3) \sqrt{80} = \sqrt{16 \cdot 5} = \sqrt{16} \cdot \sqrt{5} = 4\sqrt{5}$$

$$4) \sqrt{175} = \sqrt{25 \cdot 7} = \sqrt{25} \cdot \sqrt{7} = 5\sqrt{7}$$



► Ruutvõrrandi viimine normaalkujule

Näidisülesanded 1.2.

2. Vii ruutvõrrand $(2x - 1)(2x + 1) - 1 = (1 + x)^2 + 2x^2$ normaalkujule.

$$4x^2 - 1 - 1 = 1 + 2x + x^2 + 2x^2$$

$$4x^2 - x^2 - 2x^2 - 2x - 1 - 1 - 1 = 0$$

$$x^2 - 2x - 3 = 0$$

► Ruutvõrrandi taandamine

3. Taanda ruutvõrrandid.

$$1) -3x^2 - 6x + 72 = 0$$

$$-3x^2 - 6x + 72 = 0 \quad | :(-3)$$

$$\frac{-3x^2}{-3} - \frac{6x}{-3} + \frac{72}{-3} = 0$$

$$x^2 + 2x - 24 = 0$$

$$2) \frac{x^2}{2} + x - 12 = 0$$

$$\frac{x^2}{2} + x - 12 = 0 \quad | \cdot 2$$

$$\frac{2 \cdot x^2}{2} + 2 \cdot x - 2 \cdot 12 = 0$$

$$x^2 + 2x - 24 = 0$$



► Ruutjuure mõiste tundmine

1. Selgita oma sõnadega, kuidas leida arvu ruutjuurt.

2. Leia ruutjuur ja põhjenda.

a) $\sqrt{36} = 6$, sest $6^2 =$ _____

f) $\sqrt{1600} =$ _____, sest _____

b) $\sqrt{81} =$ _____, sest _____

g) $\sqrt{144} =$ _____, sest _____

c) $\sqrt{121} =$ _____, sest _____

h) $\sqrt{100} =$ _____, sest _____

d) $\sqrt{400} =$ _____, sest _____

i) $\sqrt{0} =$ _____, sest _____

e) $\sqrt{-25} =$ _____, sest _____

j) $\sqrt{1} =$ _____, sest _____

3. Selgita, mis vahe on ratsionaalarvul ja irratsionaalarvul.

4. Määra, kas arv on ratsionaalarv (Q) või irratsionaalarv (I).

7	
$\sqrt{25}$	
$\sqrt{5}$	
$\frac{1}{3}$	

0,63	
$\sqrt{169}$	
$\frac{4}{5}$	
$\sqrt{9000}$	

5. Leia arvutil ruutjuur ja ümarda see sajandikeni.

a) $\sqrt{7} =$ _____

e) $\sqrt{175,71} =$ _____

b) $\sqrt{2,5} =$ _____

f) $\sqrt{256} =$ _____

c) $\sqrt{15,83} =$ _____

g) $\sqrt{675,75} =$ _____

d) $\sqrt{11} =$ _____

h) $\sqrt{1000} =$ _____

► Ruutjuure leidmine korrutisest ja jagatisest

6. Arvuta arvutit kasutamata.

a) $\sqrt{4 \cdot 9} =$ _____

f) $\sqrt{100 : 25} =$ _____

b) $\sqrt{8} \cdot \sqrt{2} =$ _____

g) $\sqrt{98} : \sqrt{2} =$ _____

c) $\sqrt{81 \cdot 100} =$ _____

h) $\sqrt{\frac{900}{25}} =$ _____

d) $\sqrt{20} \cdot \sqrt{5} =$ _____

i) $\sqrt{\frac{1600}{64}} =$ _____

e) $\sqrt{121} =$ _____

j) $\sqrt{\frac{100}{625}} =$ _____

7. Too tegur juuremärgi alt välja.

a) $\sqrt{8} = \sqrt{4 \cdot 2} = \sqrt{4} \cdot \sqrt{2} = 2\sqrt{2}$

d) $\sqrt{90} =$ _____

g) $\sqrt{4x} =$ _____

b) $\sqrt{27} =$ _____

e) $2\sqrt{18} =$ _____

h) $\sqrt{125y} =$ _____

c) $\sqrt{75} =$ _____

f) $5\sqrt{50} =$ _____

i) $x \cdot \sqrt{8yz} =$ _____

8. Vii tegur juuremärgi alla.

a) $2 \cdot \sqrt{10} = \sqrt{2^2 \cdot 10} = \sqrt{40}$

d) $10 \cdot \sqrt{7} =$ _____

g) $3 \cdot \sqrt{a} =$ _____

b) $6 \cdot \sqrt{2} =$ _____

e) $\frac{1}{3} \cdot \sqrt{3} =$ _____

h) $4 \cdot \sqrt{x^2} =$ _____

c) $8 \cdot \sqrt{0,5} =$ _____

f) $5 \cdot \sqrt{\frac{1}{5}} =$ _____

i) $ab \sqrt{3} =$ _____

► Ruutvõrrandi eristamine teistest võrranditest

9. Tõmba ruutvõrrandile joon alla. Mis liiki võrrandid on varasemast tuttavad?

a) $2x + 3y = 7$

f) $-5 - y^2 - 4y = 3$

k) $\frac{9}{y^2} + 25 = 9$

b) $x^2 + x + 9 = 0$

g) $x^2 - x = 2$

l) $-7 + b = b^2$

c) $5x + 4x^2 = -12$

h) $\frac{3}{x} + 7 = 8$

m) $2x^2 + 5 - 2x^2 = x$

d) $16x = 32$

i) $4 + 25y - 10y = 4$

n) $(4x)^2 = 25$

e) $12x + 7 - 5x = 10$

j) $7a + 4 = 7a + 4$

o) $x = y$

► Ruutvõrrandi liikmete ja nende kordajate nimetamine

10. Nimeta ruutvõrrandi liikmed.

$$\textcircled{a}x^2 + \textcircled{b}x + \textcircled{c} = 0$$

11. Täida tabel, määrates ruutvõrrandi liikmete kordajad.

Ruutvõrrand	Ruutliikme kordaja	Lineaarliikme kordaja	Vabaliige
$4x^2 + 3x + 2 = 0$			
$3y + 7 - 2y^2 = 0$			
$9 + z^2 - 3z = 0$			

► Ruutvõrrandi viimine normaalkujule

12. Vii võimalusel ruutvõrrand normaalkujule.

- | | |
|---------------------------|------------------------------|
| a) $3x^2 + 5 = -4x$ _____ | d) $0 = 2x^2 + 3x - 1$ _____ |
| b) $-9x - 8 = x^2$ _____ | e) $6m^2 - 4m + 2 = 0$ _____ |
| c) $10 = y - 2y^2$ _____ | f) $2n^2 + 5n = 8$ _____ |

► Ruutvõrrandite liigitamine täielikeks ja mittetäielikeks

13. Määra, kas ruutvõrrand on täielik või mittetäielik. Mittetäielike võrrandite puhul kirjuta, mis liige on puudu.

- | | |
|------------------------------|-----------------|
| a) $3x^2 + 5x + 9 = 0$ _____ | Puudu on _____. |
| b) $2y + y^2 = 0$ _____ | Puudu on _____. |
| c) $5z^2 = -8$ _____ | Puudu on _____. |
| d) $-4m + 8 = 5m^2$ _____ | Puudu on _____. |
| e) $15n^2 = 0$ _____ | Puudu on _____. |

► Ruutvõrrandi taandamine

14. Taanda ruutvõrrand.

- | | |
|--------------------------------|-------------------------------------|
| a) $5a^2 + 15a + 5 = 0$ _____ | d) $10y^2 - 27y + 6 = 0$ _____ |
| b) $2b^2 - 10b - 7 = 0$ _____ | e) $-\frac{1}{9}z^2 + 4z = 0$ _____ |
| c) $-3x^2 + 9x - 10 = 0$ _____ | f) $7y^2 + 5y - 8 = 0$ _____ |