

**Аллар Веэлмаа**

**РАБОЧАЯ КНИГА  
ПО МАТЕМАТИКЕ  
ДЛЯ XI КЛАССА**

**2023**

Издательство Maurus подтверждает, что рабочая книга соответствует учебному плану гимназий и требованиям к учебной литературе, установленным министром образования и науки.

Автор благодарит рецензентов, учительницу Ньюской Реальной гимназии Сирье Сильд и учителя Лооской средней школы Агу Оясоо за полезные замечания и интересные идеи. Обо всех обнаруженных неточностях и ошибках просьба сообщать по электронной почте [allarveelmaa8@hotmail.com](mailto:allarveelmaa8@hotmail.com).

Аллар Веэлмаа

### **Рабочая книга по математике для XI класса**

Рецензенты: Сирье Сильд и Агу Оясоо

Переводчик: Борис Гордон

Языковой редактор: Людмила Еланская

Техническая реализация: Хейси Вяльяк

Редактор: Инге Вестрик

Рисунки: Аллар Веэлмаа

Фотографии и иллюстрации:

**Shutterstock.com:** Хеннер Дамке (16 верхняя), Ихероп (62), Lightspring (122).

ISBN 978-9916-663-68-4

**Дигитальные материалы издательства Maurus найдёте в TaskuTark.**

Авторские права Аллар Веэлмаа и издательство Maurus OÜ 2023



[taskutark.ee](http://taskutark.ee)

Издательство Maurus

Тартуское шоссе 74, 10144 Таллинн,

тел. 5919 6117

[www.kirjastusmaurus.ee](http://www.kirjastusmaurus.ee)

[tellimine@kirjastusmaurus.ee](mailto:tellimine@kirjastusmaurus.ee)

Все права на данную публикацию охраняются законом. Никакая часть этой работы не может быть скопирована или воспроизведена в любой форме или любыми средствами, электронными или механическими, для любых целей без предварительного письменного разрешения владельца авторских прав.

## Для использующего рабочую книгу

Рабочая книга задумана для Вас, гимназист. В ней Вы найдёте необходимые формулы и образцы решений задач, однако большинство задач придётся прорешать целиком самостоятельно. За эти задачи следует браться тогда, когда соответствующая тема пройдена и предстоит контрольная или зачётная работа. Рабочая книга будет хорошим подспорьем при подготовке к государственным экзаменам, так как в ней имеются задачи по всем изучаемым в гимназии темам.

Рабочая книга подходит как для учащихся по узкой математике, так и по широкой математике. Если **номер** задачи **черный**, то она подходит для решения всем. Задания с **красным номером** в первую очередь предназначены для учеников, изучающих широкий курс, но это не означает, что ученик, изучающий узкий курс, не может их решать.

Не все задачи снабжены ответами, для проверки пользуйтесь компьютерными программами: WolframAlpha, GeoGebra, Symbolab и др.

**В рабочей книге имеются задачи по следующим темам:**

1. теория вероятности и элементы статистики;
2. прогрессии;
3. исследование функций без производных;
4. экспоненциальные и логарифмические функции, соответствующие уравнения и неравенства;
5. тригонометрические функции;
6. производная функции и её приложения.

При решении задач хорошим подспорьем будут и учебные видео, и тесты, которые найдёте в интернете по адресу [allarveelmaa.ee](http://allarveelmaa.ee).

С наилучшими пожеланиями  
Аллар Везлмаа

# 1. Теория вероятностей и элементы математической статистики

## 1.1. Основные понятия теории вероятностей

Одним из основных понятий теории вероятностей является **событие**, но при этом необходимо четко понимать:

- всегда ли происходит это событие - тогда это **достоверное** событие;
- если это событие никогда не произойдет - то это **невозможное** событие;
- событие иногда происходит, а иногда не происходит - в этом случае это **случайное** событие.

Классическая вероятность события определяется следующим образом:  $p = \frac{m}{n}$ , где  $p$  означает вероятность наступления события,  $m$  количество благоприятных возможностей и  $n$  количество всех возможностей.

Для геометрической вероятности  $p = \frac{l}{L} = \frac{s}{S} = \frac{v}{V}$ , где  $l$  обозначает длину,  $s$  - площадь, а  $v$  - объем.

Вероятность достоверного события  $p(\Omega) = 1$ , вероятность невозможного события  $p(\emptyset) = 0$ .

Если вероятность наступления события  $A$  равна  $p$ , то вероятность наступления противоположного события  $\bar{A}$  равна  $q = 1 - p$ .

Вероятность суммы двух независимых событий равна сумме вероятностей этих событий, т. е.  $p(A \cup B) = p(A) + p(B)$ .

Вероятность произведения двух независимых событий равна произведению вероятностей этих событий, т. е.  $p(A \cap B) = p(A) \cdot p(B)$ .

Сумма вероятностей двух взаимоисключающих событий равна сумме вероятностей этих событий за вычетом вероятности их совместного возникновения, т. е. их произведения, т. е.

$$p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B).$$

Формула Бернулли:  $P_{n,k} = C_n^k \cdot p^k \cdot q^{n-k}$ .

Количество перестановок:  $P_n = n!$ ;  $n! = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \dots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$ .

Количество комбинаций:  $C_n^m = \frac{n!}{m!(n-m)!}$ . Количество вариаций:  $A_n^m = V_n^m = \frac{n!}{(n-m)!}$ .

**Примечание.** Калькуляторы обычно имеют отдельные клавиши для определения количества комбинаций, вариаций и перестановок, либо они дублируются с какой-то другой клавишей. Пользователь должен посмотреть это на своем калькуляторе, а также следует сделать контрольные расчеты с простыми числами, чтобы при решении задач все же использовались правильные клавиши. Некоторые примеры<sup>1</sup>:

Марка калькулятора	Комбинации	Вариации	Перестановки
CASIO fx-350MS	отдельная клавиша $nCr$	$nPr$ на месте $nCr$	$n!$ на месте $x^{-1}$
CITIZEN SR-270X	на месте деления $nCr$	на месте умножения $nPr$	$n!$ на месте $x^{-1}$

<sup>1</sup> Наиболее точную информацию по использованию своего калькулятора можно получить из руководства, прилагаемого к калькулятору.

1. Мартин еще не знает букв, но ему дали для игры карточки с буквами, по одной букве на каждой карточке. На карточках есть буквы **Ш, Ъ, Л, А, О, Д**. Сколько разных слов сможет составить Мартин, если будет использует каждый раз все карточки?
2. Какова вероятность, что Мартин составит слово **ЛОШАДЬ**? Какова вероятность, что Мартин не составит слово **ЛОШАДЬ**? **Ответ:  $p_1 = 1 : 720$ ;  $p_2 = 719 : 720$ .**

3. Событие *A* следующее: «Грете-Сильвия получила за контрольную оценку 1». Каково обратное событие к этому событию? Возможные оценки – следующие: „1“, „2“, „3“, „4“ и „5“.
4. Какова вероятность того, что число, выпавшее при броске игральной кости, не является простым числом? **Ответ:  $p = 0,5$ .**
5. Перед домом припарковано 6 белых, 8 красных и 11 черных автомобилей. Какова вероятность того, что Бобулийна угонит белую или черную машину? **Ответ: 0,68.**
6. В пенале у Кайсы 5 синих карандашей, 3 черных карандаша и 2 красных карандаша. Карл-Мартин берет из пенала Кайсы случайный карандаш. Какова вероятность того, что этот карандаш будет
  - а) красный карандаш;
  - б) красный или синий карандаш;
  - в) синий, красный или черный карандаш;
  - г) желтый карандаш?

**Ответы: а) 0,2; б) 0,7; в) 1; г) 0.**



7. Бросают две обычных игральных кости (цифры 1–6). Какова вероятность того, что сумма выпавших цифр на костях: а) равно 8; б) больше 5; с) не превышает 7; d) четное число; е) не более 8; f) не менее 8?

Ответы: а)  $\frac{5}{36}$ ; б)  $\frac{13}{18}$ ; с)  $\frac{7}{12}$ ; d)  $\frac{1}{2}$ ; е)  $\frac{13}{18}$ ; f)  $\frac{5}{12}$ .

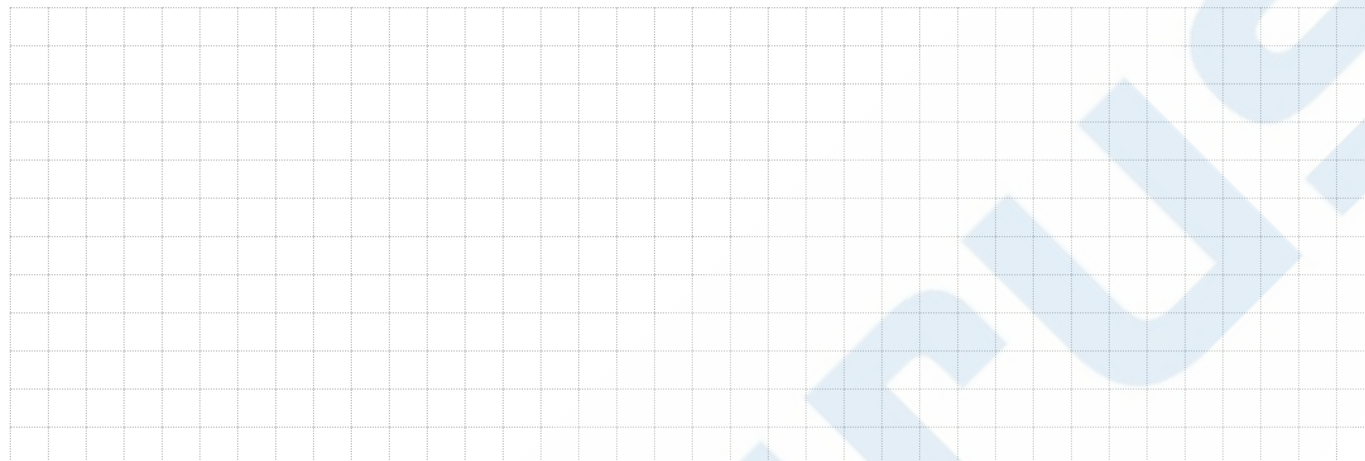
8. Бросают две обычных игральных кости. Каково наиболее вероятное произведение цифр?

9. В классе 36 учеников, из них 17 юношей. Один ученик отсутствовал в школе в пятницу. Какова вероятность того, что отсутствующий не был юношей?

10. Куб с окрашенными гранями был распилен на 512 маленьких кубиков. Какова вероятность того, что из маленьких кубиков, помещенных в урну, будет выбран кубик, у которого а) одна грань окрашена; б) окрашены две грани; с) окрашены три грани; d) все грани не окрашены?

Ответы: а)  $\frac{27}{64}$ ; б)  $\frac{9}{64}$ ; с)  $\frac{1}{64}$ ; d)  $\frac{27}{64}$ .

11. В колоде 52 карты. Какова вероятность того, что
- выбранная карта красной масти;
  - выбранная карта не является дамой;
  - выбранная карта красная и дама;
  - выбранная карта не является королем червей;
  - выбранная карта больше 6;
  - выбранная карта красной или черной масти?



Ответы: а) 0,5; б)  $\frac{12}{13}$ ; в)  $\frac{1}{26}$ ; г)  $\frac{51}{52}$ ; е)  $\frac{8}{13}$ ; ф) 1.

## 1.2. Использование комбинаторики в вычислении вероятности

1. Найдите

- |                 |           |                 |            |                    |
|-----------------|-----------|-----------------|------------|--------------------|
| а) $6! =$       | б) $0! =$ | в) $10! =$      | г) $69! =$ | е) $70! =$         |
| ф) $C_6^0 =$    |           | г) $C_6^6 =$    |            | х) $C_{12}^{10} =$ |
| и) $C_{10}^2 =$ |           | ж) $C_{12}^6 =$ |            | к) $C_6^1 =$       |
| л) $A_{12}^6 =$ |           | м) $A_6^5 =$    |            | н) $A_8^3 =$       |

2. Учитель физкультуры Рейн решил сформировать всевозможные построения из 10 мальчиков в классе. Сколько у него вариантов? Сколько времени потребуется, если для формирования одного построения требуется 5 секунд?
3. На школьную спартакиаду 11-й класс выставляет свою эстафетную команду 5 x 100 м из 5 человек. У старосты класса есть выбор между пятью молодыми людьми с равными способностями. В скольких различных порядках могут бежать юноши?



4. Бобулийна и Хийремай играют в лото Keno Lotto, где должны быть заполнены 10 полей из 64. Бобулийна всегда выбирает вариант А, а Хийремай всегда выбирает вариант В. У кого из игроков больше шансов на победу?

Ответ: шансы на победу равные.

5. Игровое поле Eurojackpot состоит из 50 основных квадратов, из которых следует отметить пять. Сколько билетов нужно купить, чтобы иметь возможность отметить все возможные варианты? Сколько существует вариантов? На сколько процентов увеличится количество купленных билетов, если кроме пяти основных чисел необходимо ввести два дополнительных числа от 1 до 10?

Ответ: 2 118 760; 4400%.

A					B				
Pliks-plaks					Pliks-plaks				
1	<input checked="" type="checkbox"/>	2	<input type="checkbox"/>	3	<input type="checkbox"/>	4	<input type="checkbox"/>	5	<input checked="" type="checkbox"/>
5	<input type="checkbox"/>	6	<input type="checkbox"/>	7	<input type="checkbox"/>	8	<input type="checkbox"/>	9	<input checked="" type="checkbox"/>
9	<input type="checkbox"/>	10	<input type="checkbox"/>	11	<input checked="" type="checkbox"/>	12	<input type="checkbox"/>	13	<input type="checkbox"/>
13	<input type="checkbox"/>	14	<input type="checkbox"/>	15	<input type="checkbox"/>	16	<input type="checkbox"/>	17	<input type="checkbox"/>
17	<input type="checkbox"/>	18	<input type="checkbox"/>	19	<input type="checkbox"/>	20	<input type="checkbox"/>	21	<input type="checkbox"/>
21	<input type="checkbox"/>	22	<input type="checkbox"/>	23	<input type="checkbox"/>	24	<input checked="" type="checkbox"/>	25	<input type="checkbox"/>
25	<input type="checkbox"/>	26	<input type="checkbox"/>	27	<input type="checkbox"/>	28	<input type="checkbox"/>	29	<input type="checkbox"/>
29	<input type="checkbox"/>	30	<input type="checkbox"/>	31	<input checked="" type="checkbox"/>	32	<input type="checkbox"/>	33	<input type="checkbox"/>
33	<input type="checkbox"/>	34	<input checked="" type="checkbox"/>	35	<input type="checkbox"/>	36	<input type="checkbox"/>	37	<input type="checkbox"/>
37	<input checked="" type="checkbox"/>	38	<input type="checkbox"/>	39	<input type="checkbox"/>	40	<input type="checkbox"/>	41	<input type="checkbox"/>
41	<input type="checkbox"/>	42	<input type="checkbox"/>	43	<input type="checkbox"/>	44	<input type="checkbox"/>	45	<input checked="" type="checkbox"/>
45	<input checked="" type="checkbox"/>	46	<input type="checkbox"/>	47	<input type="checkbox"/>	48	<input type="checkbox"/>	49	<input type="checkbox"/>
49	<input type="checkbox"/>	50	<input checked="" type="checkbox"/>	51	<input checked="" type="checkbox"/>	52	<input type="checkbox"/>	53	<input type="checkbox"/>
53	<input type="checkbox"/>	54	<input type="checkbox"/>	55	<input type="checkbox"/>	56	<input type="checkbox"/>	57	<input type="checkbox"/>
57	<input type="checkbox"/>	58	<input type="checkbox"/>	59	<input type="checkbox"/>	60	<input type="checkbox"/>	61	<input type="checkbox"/>
61	<input type="checkbox"/>	62	<input type="checkbox"/>	63	<input type="checkbox"/>	64	<input checked="" type="checkbox"/>		

6. Тренер команды должен выбрать 4 из 6 бегунов (порядок не имеет значения). Сколько существует различных вариантов? А сколько вариантов, если порядок бегунов важен?

Ответ:  $C_6^4$ ;  $A_6^4$ .

7. В баскетбольном чемпионате лиги Эстонии *Alexela* в сезоне 2015/2016гг. приняло участие 9 команд. Сколькими способами могли распределиться золотые, серебряные и бронзовые медали?

8. В чемпионате по баскетболу играют 9 команд, шесть из них дойдут до медальных игр. Сколько различных подгрупп из шести команд можно сформировать? Ответ:  $C_9^6$ .



9. В классе 8 девочек и 12 мальчиков. Восемью мальчикам и пяти девочкам по 8 лет, а всем остальным 7 лет. Сколько имеется различных способов сформировать группу из четырех человек в данном классе, где
- а) есть два мальчика и две девочки;
  - б) два мальчика 7 лет и две девочки 8 лет;
  - с) есть четыре ученика одного возраста?

Ответы: а) 1848; б) 60; с) 750.

10. Бобулийна может выбирать между 6 различными платьями и 8 юбками. Сколькими способами она может выбрать платье или юбку? Сколько вариантов выбора одежды было бы, если нужно было выбирать между 6 платьями и 8 парами обуви?

11. Перед домом Бобулийны стоят 3 черных, 7 белых и 9 красных автомобилей. В одну ночь угнали три машины. Какова вероятность того, что
- а) были угнаны только зеленые автомобили;
  - б) были угнаны только черные автомобили;
  - в) среди угнанных автомобилей есть автомобили красного, белого или черного цвета;
  - г) среди угнанных автомобилей нет красных?

12. Сколькими способами можно расставить 8 ладей на шахматной доске (8 x 8 клеток) так, чтобы они не били друг друга? **Ответ: для размещения ладей имеется 8 способов!**

13. У Марии в холодильнике 20 яиц, шесть из которых она сварила. Она поместила вареные яйца в холодильник, но позже забыла, куда именно их положила. Какова вероятность того, что а) среди шести случайно выбранных яиц нет варенных яиц; б) вареное яйцо одно; в) есть не более трех варенных яиц; г) все яйца варенные?

Ответы: а)  $\frac{C_{14}^6 \cdot C_6^0}{C_{20}^6}$ ; б)  $\frac{C_{14}^5 \cdot C_6^1}{C_{20}^6}$ ; в)  $\frac{C_{14}^5 \cdot C_6^1}{C_{20}^6}$ ; г)  $\frac{C_6^0 \cdot C_{14}^6 + C_6^1 \cdot C_{14}^5 + C_6^2 \cdot C_{14}^4 + C_6^3 \cdot C_{14}^3}{C_{20}^6}$ ; д)  $\frac{C_{14}^0 \cdot C_6^6}{C_{20}^6}$ .

14. Для поступления в университет абитуриент должен сдать четыре вступительных экзамена. Экзамены оцениваются по пятибалльной системе. Для поступления сумма оценок четырех экзаменов должна быть не менее 17. Сколькими способами он может сдать экзамены (при оценке «2» или «1» он выбывает из конкурса) для поступления университет? **Ответ: 31 разным способом.**
15. Кайса готовилась к контрольной, в которой может быть шесть из 20 заранее известных вопросов. Кайса может ответить на 18 вопросов. Какова вероятность того, что Кайсе выпадет тот вариант контрольной, в которой
- она сможет ответить на все вопросы;
  - она не сможет ответить максимально на два вопроса;
  - она не сможет ответить ни на один вопрос?