

Allar Veelmaa

Kitsa matemaatika tööraamat 10. klassile

Maurus

Kirjastus Maurus kinnitab: tööraamat vastab gümnaasiumi riiklikule õppekavale ning haridus- ja teadusministri poolt õpekirjandusele kehtestatud nõuetele.

Allar Veelmaa

Kitsa matemaatika tööraamat 10. klassile

Retsenseerinud Anne Küüsmäa ja Agu Ojasoo.

Autor tänab retsensente, toimetajat ja teisi kirjastuse töötajaid kasulike märkuste ja huvitavate ideede eest.

Keeletoimetaja: Maurus Kirjastus

Toimetaja: Inge Vestrik

Tehniline teostus: Heisi Väljak

Joonised: Allar Veelmaa

ISBN 978-9908-60-038-3



Mauruse digiõppevara leiad TaskuTargast.

(taskutark.ee)

Autoriõigus: Allar Veelmaa ja OÜ Maurus Kirjastus

Esmatrükk 2026

Maurus Kirjastus

Tartu mnt 74, 10113 Tallinn, tel 5919 6117

www.kirjastusmaurus.ee

tellimine@kirjastusmaurus.ee

Kõik õigused käesolevale väljaandele on seadusega kaitstud. Ilma autoriõiguse omaniku kirjaliku loata pole lubatud ühtki selle tööraamatu osa paljundada ei elektrooniliselt, mehaaniliselt ega muul viisil.

Tööraamatu kasutajale

Käesolev tööraamat on mõeldud nendele 10. klassi õpilastele, kes õpivad kitsa matemaatika ainekava järgi. Siit leiate vajalikke valemeid, ülesannete näidislahendusi ning ülesandeid iseseisvaks lahendamiseks järgmiste kursuste kohta

1. Arvuhulgad. Avaldised. Võrrandid ja võrratused

2. Trigonomeetria

3. Vektorid. Joone võrrand

Tööraamatus on kõigepealt valemid, nendele järgnevad näiteülesanded, seejärel ülesanded iseseisvaks lahendamiseks. Arvutamiseks on jäetud vaba ruum ülesannete alla.

Mitmed näidisülesanded on lahendatud tehisintellekti abil. Nende ülesannete juures on ka vastav märged, et missugust TI varianti on kasutatud.

Tööraamatu ülesannete lahendamisel võib abiks olla ka videotundide kogumik, mille leiate internetist aadressil allarveelmaa.ee. Täiendavate küsimuste korral kirjutage allarveelmaa8@hotmail.com.

Paljud ülesanded on vastustega. Kui vastust pole antud, siis mõningate ülesannete puhul saate kasutada arvutiprogramme **WolframAlpha** (<http://m.wolframalpha.com/>) ja **Calcme** (<https://calcme.com/a>) või küsida nõua TI-lt, kuid siis peab pakutud lahenduskäigu vastu olema kriitiline, sest TI võib välja pakkuda ka täiesti vale lahenduskäigu.

Edu soovides
Allar Veelmaa

1. Arvuhulgad. Avaldised. Võrrandid ja võrratused

1.1. Hulgad ja tehted nendega. Hulkade ühend ja ühisosa

1. Kirjutage, mida tähendavad järgmised sümbolid.

$\in$	$\neq$	$\mathbb{Z}$
$\mathbb{Q}$	$\emptyset$	$\mathbb{R}$
$\cup$	$\cap$	∞
$\notin$	$\subset$	$\mathbb{N}$

2. Tooge näiteid hulkade kohta oma koolist, klassist või asulast, kus elate.

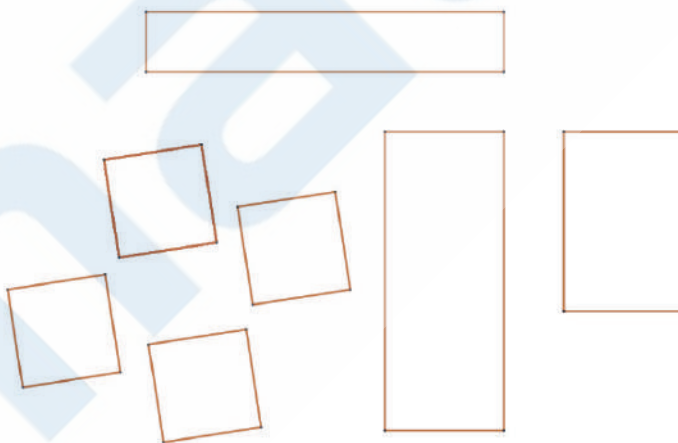
3. Mida tähendab lause $A = \{x | x > 5 \text{ ja } x \in \mathbb{N}\}$?

4. Mitu arvu on hulgas $A = \{x | x < 0 \text{ ja } x \in \mathbb{N}\}$?

5. On antud hulgad $A = \{1; 2; 3; 4; 5\}$ ja $B = \{3; 4; 5; 6; 7\}$. Leidke nende hulkade ühend ja ühisosa.

6. On antud hulgad $A = \{1; 2; 3; 4; 5\}$ ja $B = \{6; 7; 8\}$. Leidke nende hulkade ühend ja ühisosa.

7. Joonisel on kujutatud seitse geomeetrilist kujundit. Värvige ruudud siniseks ja ristkülikud roheliseks. Iga kujundit võib värvida ühe korra.



Selgitage, miks ülesandes 7 ei saa ühtegi kujundit värvida.

Vastused. 4. Selles hulgas ei ole ühtegi arvu, tegemist on tühja hulgaga; 5. $A \cup B = \{1; 2; 3; 4; 5; 6; 7\}$ ja $A \cap B = \{3; 4; 5\}$; 6. $A \cup B = \{1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8\}$ ja $A \cap B = \emptyset$; 7. Vastavalt ruudu ja ristküliku definitsioonile.

1.2. Naturaal-, täis- ja ratsionaalarvud

Erinevates materjalides võib kohata kahesugust naturaalarvude hulga käsitlemist. Eesti kooliõpikutes esitatakse naturaalarvude hulk tavaliselt nii:

$$\mathbb{N} = \{0; 1; 2; 3; 4; \dots\},$$

mõningates varasemates õpikutes ei loeta arvu 0 naturaalarvuks, sest loendamisel me tavaliselt nulli ei saa (nt klassis on null elevanti vms).

8. Täitke tabel ja uurige, kas naturaalarvude summa ja korrutis kuuluvad **alati** naturaalarvude hulka. Aga naturaalarvude vahe ja jagatis?

a	b	$a + b$	$a \cdot b$	$a - b$	$a : b$
8	2				
2	8				
6	6				
0	0				
100	100				

Missuguse järeltulete?

9. Missugused arvud tuleb lisada naturaalarvudele, et tekiks täisarvude hulk? Kuidas täisarvude hulka tähistatakse? Missugune arv on vähim täisarv?

10. Kas kahe täisarvu summa, vahe ja korrutis kuuluvad **alati** täisarvude hulka? Mida saate öelda kahe täisarvu jagatise kohta?

11. Kuidas tähistatakse ratsionaalarvude hulka? Kui ratsionaalarvuks nimetatakse arvu, mida saab kirjutada jagatisena $\frac{a}{b}$, siis lisatakse alati tingimus, et $b \neq 0$. Miks see tingimus on vajalik? Mis juhtub, kui mõni nullist erinev arv jagada nulliga (katsetage oma kalkulaatoriga)?

12. Teisendage antud ratsionaalarv kümnendmurruks kalkulaatori abil (või peast), kui see on võimalik.

$\frac{1}{2} =$	$\frac{3}{4} =$	$\frac{1}{8} =$	$\frac{1}{5} =$
$\frac{3}{8} =$	$\frac{5}{16} =$	$\frac{7}{2} =$	$\frac{10}{4} =$
$\frac{1}{64} =$	$\frac{6}{25} =$	$\frac{11}{125} =$	$\frac{0}{213} =$
$\frac{17}{17} =$	$\frac{49}{100} =$	$\frac{14}{128} =$	$\frac{1}{0} =$

13. Teisendage arvud $\frac{2}{3}$; $\frac{5}{9}$; $\frac{5}{13}$ ja $\frac{7}{123}$ kümnendmurruks. Mida märkate?

14. Kasutades IT-vahendeid leidke, mitmest numbrist koosneb murru $\frac{12}{1234567}$ periood.

15. Teisendage antud kümnendmurd taandatud harilikuks murrudeks (võivad olla liigmurrud).

0,5 =	1,2 =	0,07 =	0,125 =
0,25 =	1,5 =	0,1 =	0,01 =
1,75 =	0,00001 =	10,1 =	0 =
0,(3) =	2,5 =	1,07 =	2,225 =

16. Uurige tehisintellekti abil, kes ja millal võttis süsteemselt kasutusele kümnendmurrud. Kas see oli enne või pärast trükikunsti leiutamist?

1.3. Irratsionaalarvud ja reaalarvud

Mille poolest erinevad ratsionaalarvud ja irratsionaalarvud? Näiteks MathGPT¹ (<https://math-gpt.org>) vastas nii: (Arvestage sellega, et erinevad GPT versioonid võivad anda erineva kujuga vastuseid.)

Irratsionaalarvud on need arvud, mida ei saa kirjutada kahe täisarvu jagatise ehk murdarvuna $\frac{a}{b}$, kus a ja b on täisarvud ja $b \neq 0$. Peamised erinevused ratsionaal- ja irratsionaalarvude vahel on järgmised:

- Ratsionaalarvud: saab alati esitada kujul

$$\frac{a}{b}, \quad a, b \in \mathbb{Z}, \quad b \neq 0.$$

Näiteks $\frac{3}{4}, -\frac{7}{2}, \frac{5}{1} = 5$.

- Irratsionaalarvud: ei ole võimalik kirjutada täpselt ühegi kahe täisarvu jagatisena.

- Ratsionaalarvude kümnendmurrud on kas lõppevad või perioodilised.

Näited:

$$0,75 \quad (\text{lõppev}), \quad 0,333\dots = 0.\bar{3} \quad (\text{perioodiline}).$$

- Irratsionaalarvud annavad kümnendmurruna lõpmatult pikad, mitteperioodilised jadasid.

Näiteks

$$\sqrt{2} = 1,41421356\dots \quad (\text{ei kordu}), \quad \pi = 3,14159265\dots \quad (\text{mitteperioodiline}).$$

Kui laiendame ratsionaalarvude hulka (tähis $\mathbb{Q}$) irratsionaalarvude hulgaga (tähis $\mathbb{I}$), siis nende hulkade ühendiks on **reaalarvude hulk**, st

$$\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup \mathbb{I}.$$

17. Tabelis on arvud. Joonistage kõikidele irratsionaalarvudele ümber ovaal ja ratsionaalarvudele tõmmake alla kaks joont. Mitu arvu on märgistamata, miks?

0,5	$\sqrt{2}$	$\sqrt{1024}$	$\sqrt{3}$
1,12121212...	1,5000000...	$\sqrt{-2}$	$\frac{3}{11}$
$-\sqrt{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{9}}{4}$	0
0,(3)	π^2	1,010010001...	$\frac{\sin 45^\circ}{\cos 45^\circ}$

18. Ruudu külg on $\sqrt{2}$ cm. Kas ruudu pindala on ratsionaalarv või irratsionaalarv? Aga ümbermõõt?

19. Ristküliku küljed on 5 cm ja 12 cm. Kas diagonaali pikkus on irratsionaalarv?

20. Risttahuka küljed on 5 cm, 6 dm ja 7 m. Kas selle risttahuka diagonaali pikkus on ratsionaalarv? Põhjendage vastust. Arvutage risttahuka täispindala ruutdetsimeetrites.

¹ Arvestada tuleb sellega, et MathGPT ei pruugi moodustada korrektseid, eesti keele reeglistikuga kooskõlas olevaid lauseid.